

## ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРИВОЇ ЗМІЦНЕННЯ ДЛЯ ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИЧНИХ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ

Г. В. Козбур\*, О. К. Шкодзінський, І. Р. Козбур

Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя;  
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56; e-mail: kozbur.galina@gmail.com

Одним з основних шляхів підвищення надійності та водночас зменшення матеріалоемності труб під тиском, що використовуються у нафтогазотранспортній системі, є удосконалення теоретично-розрахункового апарату для прогнозування критичних навантажень, що виникають в їх стінках. Базовою для таких досліджень є задача підвищення точності та достовірності розрахунків на етапі визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів. Прогнозування граничних напружень і деформацій в матеріалі здійснюють, апроксимуючи дані експериментів деформаційними кривими або граничними поверхнями плинності. Метою роботи є запропонувати універсальний спосіб отримання узагальненої кривої, яка б найкраще узгоджувалась з даними експерименту для кожного конкретного матеріалу. У публікації описано метод отримання однопараметричної моделі узагальненої кривої деформування для пластичних металевих матеріалів. Для отримання значення параметра  $p$  як сталого матеріалу потрібно мати результати кількох найпростіших дослідів двоосного розтягу при різних комбінаціях співвідношень головних напружень. Для максимально точної калькуляції сталого матеріалу  $p$  необхідно мінімізувати вплив похибок на етапах підготовки, випробовування та обробки результатів. Перевірка моделі для інших матеріалів та підбір додаткових показників валідності дозволить із задовільною точністю описувати узагальнену криву деформування та прогнозувати напружено-деформований стан матеріалу. У комплексі з методиками врахування геометрії конструкцій отриману узагальнену криву можна використовувати для прогнозування значень реальних напружень, що виникають в стінках труб під тиском.

Ключові слова: узагальнена деформаційна крива; ділянка зміцнення; критерій плинності; гіпотеза існування єдиної кривої; діаграма розсіювання експериментальних даних; кореляція.

Одним из основных путей повышения надежности и одновременно уменьшения материалоемкости труб под давлением, которые используются в нефтегазотранспортной системе, является усовершенствование теоретико-расчетного аппарата для прогнозирования критических нагрузок, возникающих в их стенках. Базовой для таких исследований является задача повышения точности и достоверности расчетов на этапе определения механических характеристик конструкционных материалов. Прогнозирование предельных напряжений и деформаций в материале осуществляют, аппроксимируя данные экспериментов деформационными кривыми или предельными поверхностями текучести. Целью работы является предложить универсальный способ получения обобщенной кривой, которая бы лучше согласовывалась с данными эксперимента для каждого конкретного материала. В публикации описан метод получения однопараметрической модели обобщенной кривой деформирования для пластических металлических материалов. Для получения значения параметра  $p$  как постоянной материала необходимо иметь результаты нескольких простых опытов двухосного растяжения при различных комбинациях соотношений главных напряжений. Для максимально точной калькуляции постоянной материала  $p$  необходимо минимизировать влияние погрешностей на этапах подготовки, испытания и обработки результатов. Проверка модели для других материалов и подбор дополнительных показателей качества позволит с удовлетворительной точностью описывать обобщенную кривую деформирования и прогнозировать напряженно-деформированное состояние материала. В комплексе с методиками учета геометрии конструкций полученную обобщенную кривую можно использовать для прогнозирования значений реальных напряжений, возникающих в стенках труб под давлением.

Ключевые слова: обобщенная деформационная кривая; участок упрочнения; критерий текучести; гипотеза существования единой кривой; диаграмма рассеивания экспериментальных данных; корреляция.

One of the main ways to increase reliability and at the same time reduce the materials consumption of pipes under pressure, used in the oil and gas transportation system, is to improve theoretical and computational methods to predict critical loads in their walls. These studies are based on the problem of accuracy and reliability of calculations at the stage of determination of mechanical characteristics of structural materials. Prediction of ultimate stresses and strains in the material is performed by approximation of experimental data using deformation curves or yield strength. The purpose of the work is to propose a universal way to obtain a generalized curve for better

consistence with the experimental data for each specific material. The paper describes a method used to develop a one-parameter model of a generalized deformation curve for plastic metal materials. To obtain the parameter  $p$  value as a constant of the material, it is necessary to have the results of several simple biaxial tension experiments with various combinations of the principal stress ratios. For the most accurate calculation of constant material  $p$ , it is required to minimize the effect of errors at preparation, testing and result processing stages. The model verification for other materials and selection of additional quality indicators will allow satisfactory accuracy to describe the generalized deformation curve and predict the stress-strain state of the material. In combination with the methods for structural geometry, the obtained generalized curve can be used to predict the real stress values in pipe walls under pressure

Keywords: generalized deformation curve; hardening segment; yield criterion; the hypothesis of generalized curve existence; scatter diagram of experimental data; correlation.

## Вступ

Одним з основних шляхів підвищення надійності та водночас зменшення матеріалоемності труб під тиском, що використовуються у нафтогазотранспортній системі, є удосконалення теоретично-розрахункового апарату для прогнозування критичних навантажень, що виникають в їх стінках. Базовою для таких досліджень є задача підвищення точності та достовірності розрахунків на етапі визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів. Прогнозування граничних напружень і деформацій в матеріалі здійснюють, апроксимуючи дані експериментів деформаційними кривими або граничними поверхнями плинності. Розробка нових конструкційних матеріалів та зростаючі вимоги до пропускну здатності та робочого тиску в трубах, і, разом з тим, зменшення матеріалозатратності їх виготовлення посилюють вимоги до точності інженерних розрахунків. Експериментальна реалізація всього спектру напружено-деформованих станів зразків конструкційних елементів є складною та затратною, оскільки вимагає руйнування великої кількості зразків, створення і утримання вартісного обладнання. Тому пошук ефективних методів розрахунку прогнозних значень критичних навантажень на стінки труб, що працюють під тиском, та визначення реалістичного коефіцієнта запасу залишається актуальною задачею. Підвищити точність та достовірність прогнозних значень можна через удосконалення методик розрахунку та використання комп'ютерної техніки.

Застосування різних критеріїв міцності до знаходження критичних навантажень в тонкостінних трубах розглянуто в [1], [2]. Імплементация критеріїв до розрахунків методом скінченних елементів досліджено в [3]. Розвиток підходів до оцінювання граничних навантажень в трубах запропоновано в [4]. Детальні порівняння застосування різних критеріїв здійснено в [5]. Питання розробки критеріїв міцності набуло свого розвитку в роботах [6]. Двопарамет-

ричний критерій міцності для металевих матеріалів розроблено в [7]. Розвиток критерію Мізеса для ізотропних нестисливих матеріалів запропоновано в [8]. Особливості застосування критеріїв міцності з врахуванням кристалографічної будови матеріалів розглянуто в [9].

## Ціль роботи

Запропонувати новий узагальнений підхід до розрахунку критичних напружень, який би не суперечив класичним підходам, але давав можливість враховувати особливості деформування конкретних матеріалів. Описати процедуру знаходження сталої матеріалу для побудови моделі узагальненої кривої деформування.

## Виклад основного матеріалу

Опірність матеріалу пластичному деформуванню та руйнуванню визначають із найпростіших дослідів. Реалізуючи плоский напружений стан та вимірюючи зміни в розмірах зразків, отримують набори значень «напруження-деформації», які потім апроксимують поверхнями граничних станів у просторі головних напружень або кривими деформування.

Поверхні граничних станів, або граничні поверхні плинності (у двовимірному випадку – граничні криві) використовують для прогнозування критичних значень напружень, що виникають у зразках матеріалів. Причому залежно від умов експлуатації конструкції критичним навантаженням вважають таке, що спричиняє або появу пластичних деформацій, або досягнення певного їх рівня. Для визначення граничних напружень в умовах складного напруженого стану в теорії пластичності використовують «класичні» теорію максимальних дотичних напружень Кулона-Треска та теорію питомої потенціальної енергії формозміни Мізеса.

Аналітично умова пластичності Треска описується співвідношенням (1):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \quad (1)$$

умова пластичності Мізеса – формулою (2):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_M^2, \quad (2)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження,

$\sigma_T$  – еквівалентні напруження Треска,

$\sigma_M$  – еквівалентні напруження Мізеса.

Часткова узгодженість класичних граничних поверхонь плинності з експериментальними даними сприяла пошукові і розробці нових теорій і критеріїв плинності (Писаренка–Лебедева [10], Ковальчука [11], Друкера і Прагера [12], Ягна [13], Біргера [14], Жу [6]; Потапової і Ярцева [15] та ін.). Достатньо повний виклад розрахункових рівнянь різних критеріїв плинності зроблено в [11; 16–18]. Незважаючи на чисельні дослідження в цій галузі, на сьогодні залишається досить проблематичною оцінка граничних напружень в умовах складного напруженого стану. Для переважної більшості критеріїв розрахункові значення добре узгоджуються з експериментальними лише для конкретних матеріалів або типів матеріалів. Тому на практиці для розрахунків найчастіше використовують «класичні» критерії, більшою мірою через простоту обчислень.

На відміну від граничних кривих плинності, за кривими деформування відслідковують напруження та деформації впродовж усього процесу навантаження. Криві деформування в головних напруженнях та головних деформаціях є первинними для подальшої обробки та аналізу. У даному дослідженні під кривою деформування слід розуміти ділянку зміцнення матеріалу, що має критичну важливість при вивченні поведінки навантажених конструкцій, для яких допускається пластичне деформування. В цьому разі критичним називають напруження, при перевищенні якого в зразку розвиваються локальні пластичні деформації.

Для побудови кривої деформування матеріалу найчастіше використовують максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  та максимальні кутові деформації  $\gamma_{\max}$  або інтенсивності напружень  $\sigma_i$  та інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i$  (або пропорційні до них октаедричні координати), залежно від типу прикладеного навантаження. Для більшості матеріалів крива деформування, побудована як для максимальних дотичних напружень, так для інтенсивностей напружень, залежить від виду напруженого стану. Численні дослідження присвячені пошуку такої системи координат, в якій можна побудувати єдину для всіх видів напруженого стану криву деформування. Огляд та аналіз підходів до побудови єдиної кривої описано в [17, 19].

Оскільки для більшості матеріалів експериментальні точки розташовуються між «класичними» кривими плинності – еліпсом Мізеса та шестикутником Кулона–Треска, в [20] було запропоновано узагальнити критерії (1) та (2) аналогічно, як це було зроблено Хосфордом в [21]. Як ваговий коефіцієнт, що відображає ступінь відхилення властивостей реального конструкційного матеріалу від ідеалізованого, було запропоновано ввести деяку константу матеріалу, позначену  $p$ . Запропонований критерій аналітично виражається формулою

$$\sigma_{eq} = \frac{p}{2} \left[ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|^p + |\sigma_2 - \sigma_3|^p + |\sigma_1 - \sigma_3|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

де  $\sigma_{eq}$  – еквівалентне напруження,

$p$  – деяке додатне число.

Гранична крива плинності при  $p=1$  збігається з кривою, що відповідає критерію Треска, при  $p=2$  – критерію Мізеса. При  $1 < p < 2$  отримується низка кривих, що займають проміжне положення між еліпсом Мізеса та шестикутником Кулона–Треска (рис. 1).

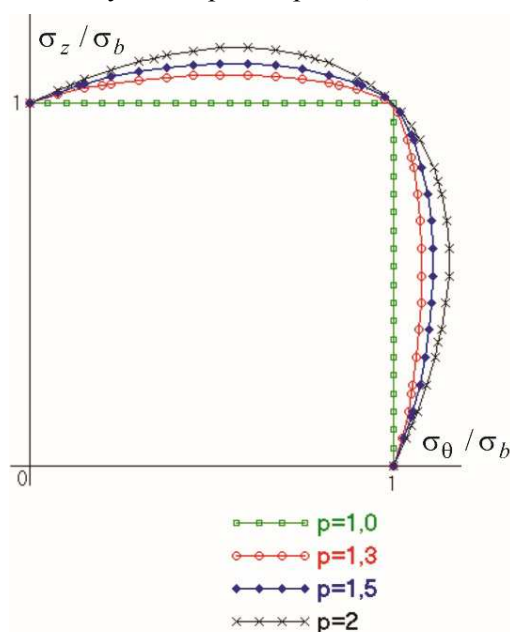


Рисунок 1 – Граничні криві плинності, отримані за формулою (3), при різних  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ )

Для аналітичного опису узагальненої, незалежної від виду напруженого стану деформаційної кривої авторами введено еквівалентні деформації  $\varepsilon_{eq}$  у вигляді (4):

$$\varepsilon_{eq} = \frac{p}{2(p+1)} \left[ \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^p + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|^p + |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|^p}{1/2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4)$$

При  $p=1$  з (3), (4) отримуються формули для визначення найбільших дотичних напружень та кутових деформацій  $\tau_{\max} - \gamma_{\max}$ , при  $p=2$  – інтенсивності напружень і деформацій  $\sigma_i - \varepsilon_i$ .

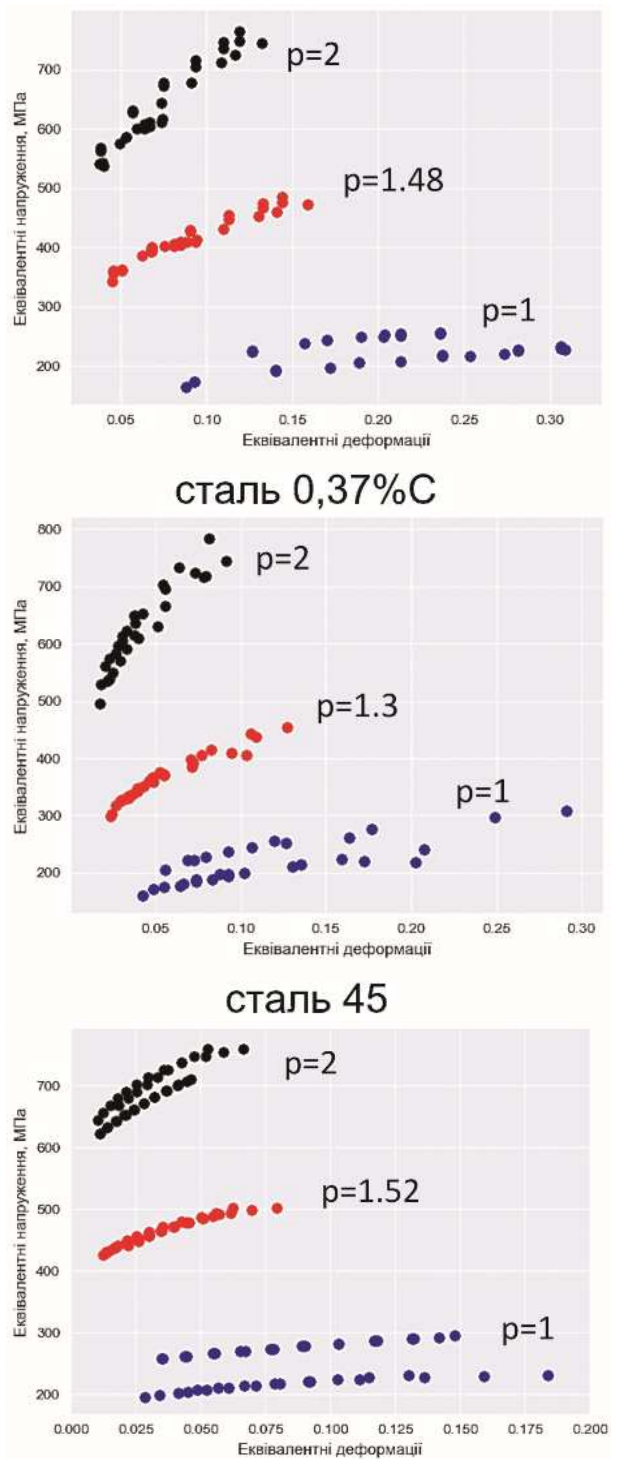
З метою визначення параметра  $p$  було взято первинні дані деформування пластичних матеріалів, отримані в головних напруженнях та деформаціях при кількох видах плоского напруженого стану. В системі еквівалентних координат  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$  було побудовано точки, що відповідають експериментальним, перераховані при різних значеннях  $p$ . Отримували діаграми розсіювання точок в координатах  $\tau_{\max} - \gamma_{\max}$  (при  $p=1$ ), в координатах  $\sigma_i - \varepsilon_i$  (при  $p=2$ ) та для проміжних значень  $p$  ( $1 < p < 2$ ) з певним кроком (0,001, 0,01, 0,05).

Для аналізу було взято експериментальні дані з двоосного розтягу зразків ізотропних металевих конструкційних матеріалів [11], [22]. В даній публікації показано результати обробки даних для вуглецевої сталі (0,37%С), вуглецевої високоякісної сталі 45, а також високолегованої високоміцної сталі 15Х2НМФА. Усі дані було отримано при температурі 20°C. Попередня обробка та стан матеріалів описані в першоджерелах.

На рис. 2 показано поля розсіювання експериментальних даних, перерахованих за формулами (3), (4) при різних значеннях  $p$  ( $1 < p < 2$ ).

Для трьох наведених зразків матеріалів візуально спостерігається менша площа розсіювання точок при оптимальному значенні параметра  $p$ . Аналогічні рисунки отримувались для інших металевих матеріалів. Для переважної більшості інших металевих матеріалів та сплавів, дані для яких було взято з вказаних джерел, параметр  $p$  набував значень з інтервалу (1; 2). Лише для кількох матеріалів оптимальними були значення, що виходили за межі цього інтервалу.

Ділянка зміцнення кривої деформування для спостережуваних матеріалів має форму, близьку до лінійної. Тому однією з умов знаходження оптимального значення  $p$  було вибрано коефіцієнт кореляції Пірсона, що максимізується. Іншим числовим показником оптимальності параметра  $p$  було вибрано показник відносного розсіювання точок – коефіцієнт варіації, який мінімізується. Розрахунки підкріплювали візуальними спостереженнями.



сталь 15Х2НМФА

По горизонталі відкладені деформації в частках цілого, по вертикалі – напруження в МПа  
**Рисунок 2 – Діаграми розсіювання експериментальних точок в координатах  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$  при різних  $p$**

Коефіцієнт кореляції Пірсона  $r$  розраховувався для всієї множини точок при кожному значенні параметра  $p$ . Для розрахунків використовували формулу:

$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n ((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})^2}}, \quad (5)$$

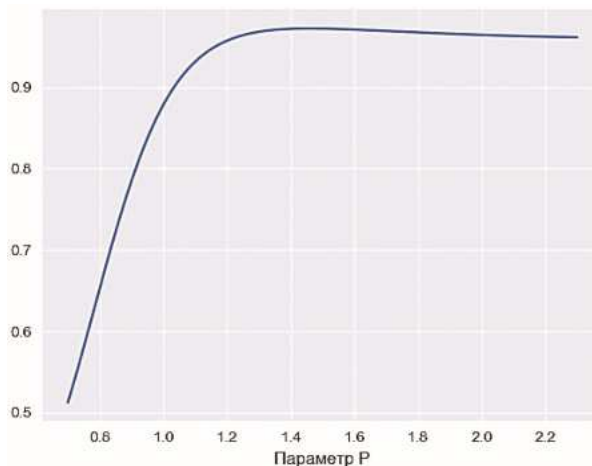
де  $\overline{\sigma_{eq}} = \left( \sum_{i=1}^n (\sigma_{eq})_i \right) / n$ ,

$n$  – кількість спостережень.

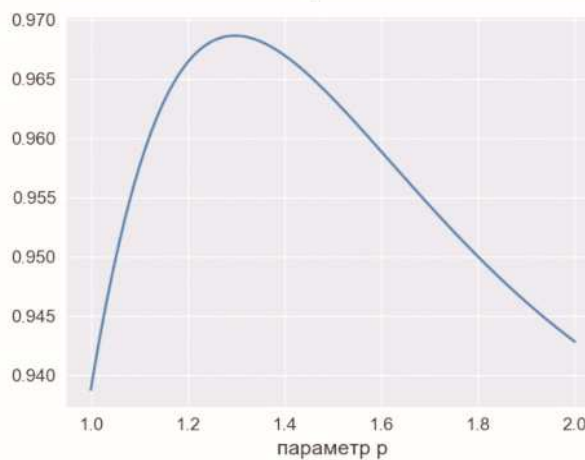
На рис. 3 показано графіки залежностей коефіцієнта кореляції Пірсона від значень параметра  $p$ .

Аналіз графіків, наведених на рисунку 3, показав, що існує максимум залежності коефіцієнта кореляції Пірсона від параметра  $p$ . Максимум яскравіше виражений у випадку сталі 45 та менш чітко виражений для двох інших зразків. Аналогічна картина спостерігалась для більшості матеріалів. В окремих випадках графіки для ділянки  $p \in [1; 2]$  були строго монотонними, максимумами спостерігались на кінцях відрізка або за його межами.

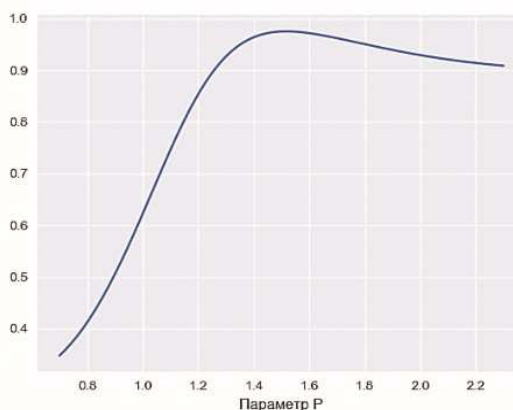
Як показник ступеня розсіювання експериментальних точок при кожному значенні  $p$  обчислювалось усереднене значення показника варіації  $V$ . Для знаходження коефіцієнта варіації  $V$  вхідні дані розбивались на певну кількість інтервалів однакової довжини. Оскільки число експериментальних точок  $n$  варіювалось в межах 20-40, за кількість часткових інтервалів було вибрано 5. При кожному значенні параметра  $p$  обчислювались значення коефіцієнта варіації  $(V)_k$  на часткових проміжках, потім ці значення усереднювались. Такий підхід до обчислення коефіцієнта  $V$  має два обґрунтування. По-перше, через різну «протяжність» щодо горизонтальної осі первинних даних, отриманих при різних видах плоского напруженого стану, на різних ділянках отримується різна кількість точок. Розбиття на часткові інтервали зменшує вагу впливу значень, отриманих на початку деформаційного процесу, на подальший регресійний аналіз кривої зміцнення для ділянки середніх та великих пластичних деформацій, що становить подальший науковий інтерес для авторів публікації. По-друге, при збільшенні значень параметра  $p$  від 1 до 2 ординати точок (еквівалентні напруження) також збільшуються, тому природньо збільшуватимуться середні значення напружень та дисперсія значень по вертикальній осі. Найбільшого значення дисперсія набуватиме на ділянці малих пластичних деформацій, де стрімкість підйому первинних кривих деформування є вищою, та, знову ж таки, сконцентрована найбільша кількість точок.



сталь 0,37%С



сталь 45



сталь 15Х2НМФА

**Рисунок 3 – Залежності  $r(p)$  коефіцієнта кореляції Пірсона від параметра  $p$  для трьох марок сталей**

Усереднення значень коефіцієнта варіації в цьому випадку зменшує вплив форми первинних кривих на значення показника щільності. Таким чином, було використано формули:

$$(V)_k = \frac{(STD)_k}{(\overline{\sigma_{eq}})_k}, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (6)$$

де  $(STD)_k$  – стандартне відхилення значень напружень  $(\sigma_{eq})_i$  з  $k$ -го проміжку від середнього значення на цьому проміжку  $(\overline{\sigma_{eq}})_k$ .

Тоді усереднене значення коефіцієнта варіації для кожного значення параметра  $p$ :

$$V = \frac{\sum_{k=1}^5 (V)_k}{5}. \quad (7)$$

На рис. 4 зображено графіки залежностей коефіцієнта варіації від параметра  $p$ .

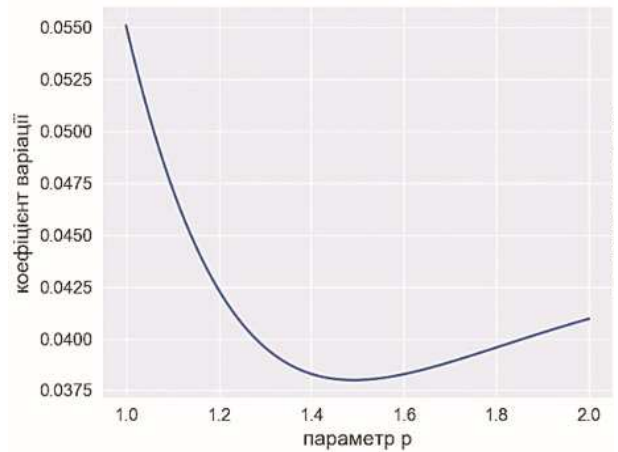
Візуальний аналіз графіків, зображених на рис. 4, показав, що кожна із залежностей досягає свого мінімуму на інтервалі (1; 2). Значення параметра  $p$ , при яких коефіцієнт варіації мінімальний, близькі до значень, отриманих за умови мінімуму коефіцієнта кореляції Пірсона. Відхилення в оптимальних значеннях  $p$ , отриманих за двома різними критеріями в даному дослідженні, можна пояснити накопиченими похибками, в тому числі на етапі вимірювання, побудови первинних кривих деформування, оцифрування графіків та при заокругленнях розрахункових даних. Також залишається відкритим питання підбору критеріїв оцінювання відносної щільності точок.

Наближені значення параметра  $p$  та відповідні показники якості моделі наведені в табл. 1. Тут  $r_{\max}$  – максимальне значення коефіцієнта кореляції Пірсона для  $p \in [1; 2]$ ,  $p(r_{\max})$  – значення параметра  $p$ , при якому досягався максимум коефіцієнта кореляції Пірсона. Мінімальне значення усередненого коефіцієнта варіації  $V$  позначено  $V_{\min}$ , значення параметра  $p$ , при якому досягалось  $V_{\min}$ , позначено  $p(V_{\min})$ .

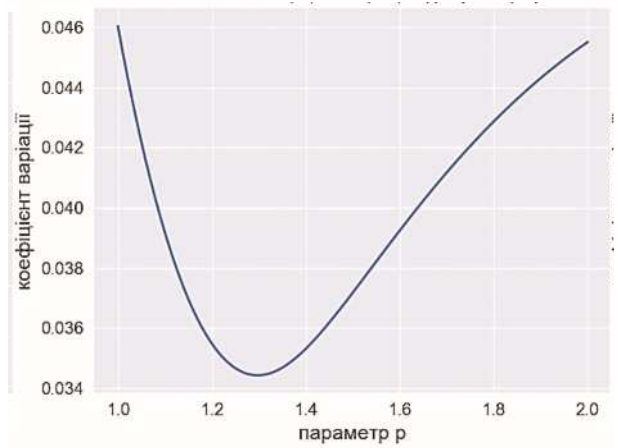
**Таблиця 1 – Наближені значення параметра  $p$  та показники якості моделі**

Марка сталі	$r_{\max}$	$p(r_{\max})$	$V_{\min}$	$p(V_{\min})$
сталь 0,37%С	0,97	1,48	3,8%	1,50
сталь 45	0,97	1,30	3,44%	1,3
15Х2НМФА	0,98	1,52	1,03%	1,39

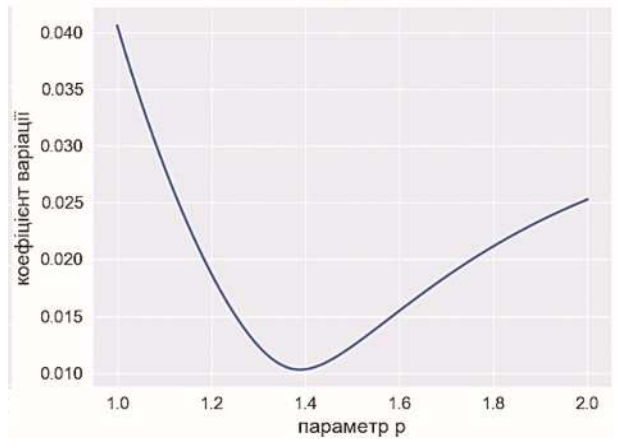
Високі показники коефіцієнта Пірсона корелюють з низькими значеннями коефіцієнта варіації, що свідчить про адекватність вибраного підходу до оцінювання відносної щільності розташування точок, отриманих при різних значеннях параметра  $p$ .



**сталь 0,37%С**



**сталь 45**



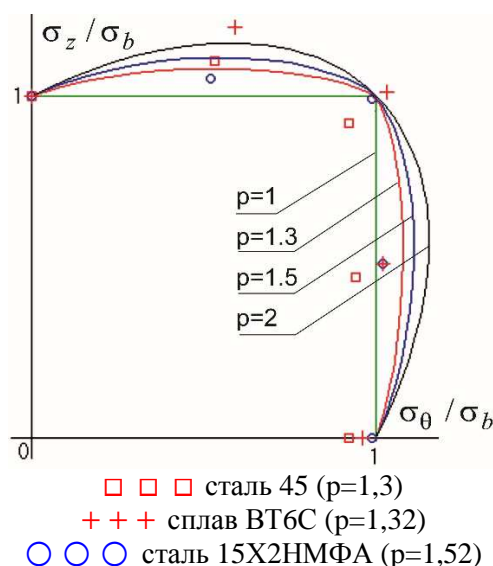
**сталь 15Х2НМФА**

**Рисунок 4 – Залежності  $V(p)$  коефіцієнта варіації від параметра  $p$  для трьох марок сталей**

На рис. 5 показано граничні діаграми міцності, побудовані за формулою (3) при чотирьох різних значеннях параметра  $p$ . Експериментальні дані взято для вуглецевої сталі 45, високолегованої сталі 15Х2НМФА та титанового деформівного сплаву ВТ6С [11, 22]. Усі зразки

матеріалів випробовувались статичним двоосним навантаженням при кімнатній температурі. Попередня обробка матеріалів та умови проведення експерименту описані в першоджерелах.

Відхилення експериментальних точок від розрахункових кривих в сторону зменшення граничних значень напружень в діапазоні  $\sigma_2 / \sigma_1 \in (0; 1)$  можна пояснити, в тому числі, впливом форми зразка на значення граничної міцності.



**Рисунок 5 – Експериментальні точки та граничні криві плинності, побудовані за формулою (3) при різних  $p$**

Враховання особливостей фізико-хімічного стану матеріалів, попередньої термообробки, умов виконання експерименту, форми та розмірів зразків для більшої кількості матеріалів дозволить зробити висновки про узгодженість розрахункових граничних поверхонь плинності з експериментальними даними та, можливо, пояснити разові та систематичні відхилення.

Перевірка моделі для інших матеріалів та підбір додаткових показників якості дозволить із задовільною точністю описувати узагальнену криву деформування аналітично та прогнозувати напружено-деформований стан матеріалу.

### Висновки

Аналіз розрахунків, проведених для серії конструкційних сталей та сплавів, показав, що існує таке розрахункове значення параметра  $p$ , для якого можна побудувати криву деформування з найменшим полем розсіювання дослідних даних. Цим самим підтверджується гіпотеза про існування єдиної кривої деформування, незалежної від виду напруженого стану. Для діаграм розсіювання, побудованих в координа-

тах  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$  при оптимальних значеннях параметра  $p$ , можна отримати рівняння регресії для єдиної кривої деформування з найкращими показниками якості. Для отримання значення параметра  $p$  як сталої матеріалу потрібно мати результати кількох найпростіших дослідів з двоосного розтягу при різних комбінаціях співвідношень головних напружень. Для максимально точної калькуляції сталої матеріалу  $p$  необхідно мінімізувати вплив похибок на етапах підготовки, випробовування та обробки результатів.

Отримання регресійних моделей узагальнених кривих зміцнення та їх валідація для широкого кола пластичних ізотропних металевих матеріалів, а також порівняльний аналіз пропонуваної методики отримання узагальненої кривої зміцнення з існуючими сучасними підходами буде висвітлено в наступних публікаціях.

У комплексі з методиками врахування геометрії конструкцій отриману узагальнену криву можна використовувати для прогнозування значень реальних напружень, що виникають в стінках труб під тиском. Прогнозування точних значень граничного тиску в трубах є визначальним для знаходження реалістичного коефіцієнта безпеки при проектуванні труб, які б задовольняли вимогам надійності та економічності.

### Література

1. Semenov A. A. Analysis of the strength of shell structures, made from modern materials, according to various strength criteria. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2018. Iss. 1. P. 16 – 33. URL: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
2. Law M, Bowie G, Fletcher L, Piper J. Burst pressure and failure strain in pipeline. *Journal of Pipeline Integrity*. 2004. P. 95–113. URL: [https://www.researchgate.net/publication/283925162\\_Burst\\_pressure\\_and\\_failure\\_strain\\_in\\_pipeline](https://www.researchgate.net/publication/283925162_Burst_pressure_and_failure_strain_in_pipeline)
3. Zhang Sh., Wang Q., Zho, W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2019. Vol. 172, P. 180-187. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.03.037>
4. Bony, M., Alamilla, J. L., Vai, R., Flores, E. Failure pressure in corroded pipelines based on equivalent solutions for undamaged pipe. *ASME. J. Pressure Vessel Technol.* 2010; 132(5): 051001. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4001801>

5. Zhu, Xian-Kui, Leis, Brian N. Prediction and Comparison of Burst Pressure for Line Pipes. *Proceedings of the 2010 8th International Pipeline Conference. 2010 8th International Pipeline Conference, Volume 1*. Calgary, Alberta, Canada. September 27 – October 1, 2010. P. 873-880. ASME. URL: <https://doi.org/10.1115/IPC2010-31581>
6. Xian-Kui Zhu, Brian N. Leis, Average shear stress yield criterion and its application to plastic collapse analysis of pipelines, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, Volume 83, Iss. 9, P. 663-671, URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2006.06.001>. (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0308016106001281>)
7. Hui-Er X. A linearized and unified yield criterion of metals and its application. *Appl Math Mech*, 1994. Iss. 15, P. 485-489. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02451498>
8. Billington E.W. Generalized isotropic yield criterion for incompressible materials. *Acta Mechanica*. 1988. Iss. 72, P. 1-20. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01176540>
9. Emmens W.C., Van Den Boogaard A.H. A Yield Criterion Based on Mean Shear Stress. *Key Engineering Materials*. 2014. P. 611 – 612. URL: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.611-612.3>
10. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976.
11. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под ред. академика НАН Украины А.А.Лебедева. Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. 540 с.
12. Drucker D.C. and Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quart. Appl. Math.* 1952. 10, No 2. P. 157-165
13. Ягн Ю.И. Новые методы расчета на прочность. *Вестник инженеров и техников*, 1931. Вып. 6. С. 122-127.
14. Биргер И. А. и др. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич; 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1993. 640 с: ил.
15. Потапова Л. Б., Ярцев В. П. Статистический критерий текучести твердых материалов при сложном напряженном состоянии. *Вестник ТГТУ*. 2003. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/statisticheskiy-kriteriy-tekuchesti-tverdyh-materialov-pri-slozhnom-napryazhenom-sostoyanii>
16. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Гриневиц Д.В., Шершак П.В. Обзор критериев прочности материалов. *Труды ВИАМ*. 2019. № 9 (81). URL: [http://viam-works.ru/ru/articles?art\\_id=1467](http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=1467)
17. YU, M.H., Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century. *Appl. Mech. Rev.* 2002. 55, 3, P. 169-218. URL: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>
18. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В.Т.Трошенко, А.А.Лебедев, В.А.Стрижало и др. К.: Логос, 2000. 570 с.
19. Шкодзінський О. К., Козбур Г., Костишин С. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. *Вісник ТДТУ*. Т.: ТДТУ, 2005. Том 10. № 1. С. 25-30. (Механіка та матеріалознавство). URL: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/31408>
20. Hosford, W. F. A Generalized Isotropic Yield Criterion. *ASME. J. Appl. Mech.* June 1972; T. 39(2). P. 607-609. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3422732>
21. Каминский А.А., Бастун В.Н. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. К. : Наук.думка, 1985. 168 с.

## References

1. Semenov A. A. Analysis of the strength of shell structures, made from modern materials, according to various strength criteria. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2018. Iss. 1. P. 16 – 33. URL: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
2. Law M, Bowie G, Fletcher L, Piper J. Burst pressure and failure strain in pipeline. *Journal of Pipeline Integrity*. 2004. P. 95-113. URL: [https://www.researchgate.net/publication/283925162\\_Burst\\_pressure\\_and\\_failure\\_strain\\_in\\_pipeline](https://www.researchgate.net/publication/283925162_Burst_pressure_and_failure_strain_in_pipeline)
3. Zhang Sh., Wang Q., Zho, W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2019. Vol. 172, P. 180-187. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.03.037>
4. Bony, M., Alamilla, J. L., Vai, R., Flores, E. Failure pressure in corroded pipelines based on equivalent solutions for undamaged pipe. *ASME. J. Pressure Vessel Technol.* 2010; 132(5): 051001. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4001801>
5. Zhu, Xian-Kui, Leis, Brian N. Prediction and Comparison of Burst Pressure for Line Pipes. *Proceedings of the 2010 8th International Pipeline*



*Conference. 2010 8th International Pipeline Conference, Volume 1.* Calgary, Alberta, Canada. September 27 – October 1, 2010. P. 873-880. ASME. URL: <https://doi.org/10.1115/IPC2010-31581>

6. Xian-Kui Zhu, Brian N. Leis, Average shear stress yield criterion and its application to plastic collapse analysis of pipelines, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, Volume 83, Iss. 9, P. 663-671. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2006.06.001>. (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0308016106001281>)

7. Hui-Er X. A linearized and unified yield criterion of metals and its application. *Appl Math Mech*, 1994. Iss. 15, P. 485-489. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02451498>

8. Billington E.W. Generalized isotropic yield criterion for incompressible materials. *Acta Mechanica*. 1988. Iss. 72, P. 1-20. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01176540>

9. Emmens W.C., Van Den Boogaard A.H. A Yield Criterion Based on Mean Shear Stress. *Key Engineering Materials*. 2014. P. 611 – 612. URL: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.611-612.3>

10. Pisarenko G. S., Lebedev A. A. Deformirovanie i prochnost materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii. Kiev: Nauk. dumka, 1976 [in Russian].

11. Lebedev A.A., Kovalchuk B.I., Giginyak F.F., Lamashevskiy V.P. Mehanicheskie svoystva konstruktsionnykh materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii / Pod red. akademika NAN Ukrainyi A.A.Lebedeva. Kiev: Izdatelskiy dom "In Yure", 2003. 540 p. [in Russian].

12. Drucker D.C. and Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quart. Appl. Math.* 1952. 10, No 2. P. 157-165

13. Yagn Yu.I. Novyye metodyi rascheta na prochnost. *Vestnik inzhenerov i tehnikov*, 1931, Vol. 6. P. 122-127. [in Russian]

14. Raschet na prochnost detaley mashin: Spravochnik / I. A. Birger, B. F. Shorr, G. B. Iosilevich. 4-e izd., pererab. i dop. M.: Mashinostroenie, 1993. 640 p. [in Russian]

15. Potapova L. B., Yartsev V. P. Statisticheskiy kriteriy tekuchesti tverdykh materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii. *Vestnik TGTU*. 2003. No3. [in Russian]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/statisticheskiy-kriteriy-tekuchesti-tverdyh-materialov-pri-slozhnom-napryazhenom-sostoyanii>

16. Oreshko E.I., Erasov V.S., Grinevich D.V., Shershak P.V. Obzor kriteriev prochnosti materialov. *Trudy VIAM*. 2019. No 9 (81). [in Russian] URL: [http://viam-works.ru/articles?art\\_id=1467](http://viam-works.ru/articles?art_id=1467)

17. YU, M.H., Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century. *Appl. Mech. Rev.* 2002. 55, 3, P. 169-218. URL: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>

18. Mehanicheskoe povedenie materialov pri razlichnykh vidah nagruzheniya / V.T.Troschenko, A.A.Lebedev, V.A.Strizhalo i dr. K.: Logos, 2000. 570 p.

19. Shkodzinsky O., Kozbur G., Kostyshyn S. (2005) Metodyka uzahalnennia diahramy deformuvannia izotropnykh materialiv dlia skladnoho napruzhenoho stanu [The technique of generalizing the diagram of isotropic material deformation in case of complex stressed state]. *Scientific Journal of TSTU (Tern.)*, vol. 10, no 1, PP. 25-30. [in Ukrainian]. URL: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/31408>

20. Hosford, W. F. A Generalized Isotropic Yield Criterion. *ASME. J. Appl. Mech.* June 1972; T. 39(2). P. 607-609. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3422732>

21. Kaminskiy A.A., Bastun V.N. Deformatsionnoe uprochnenie i razrushenie metallov pri peremennykh protsessah nagruzheniya. K.: Nauk.dumka, 1985. 168 p. [in Russian]