

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ПАРАЛЕЛЬНО ПРАЦЮЮЧИХ АГРЕГАТІВ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЕКОЛОГІЧНИХ ПОДАТКІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

М. І. Горбійчук, О. Т. Біла*, Н. Т. Лазорів

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15; тел. (0342) 504521,
e-mail: ksm@nimg.edu.ua

Для випадку, коли компресорна станція, де працюють паралельно включені газоперекачувальні агрегати, має надлишкову потужність, виникає задача оптимального вибору кількості агрегатів за певним критерієм. Сформований в роботі критерій має дві складові. Перша складова – вартість паливного газу, який споживає компресорна станція. Друга складова – екологічний податок, що нараховується за викиди оксидів азоту в навколишнє середовище. Для обчислення другої складової синтезовано емпіричну модель у вигляді полінома заданої степені, параметри і структура якої визначені з використанням генетичних алгоритмів. Така модель характеризує залежність потужності викидів оксидів азоту від технологічних параметрів, які характеризують процес спалювання природного газу в камері згоряння.

У сформованій задачі потужності викидів обчислюються за середніми значеннями технологічних параметрів, що породжує їх нечіткість. Кожний параметр як нечітка величина характеризується трикутною функцією належності, яка апроксимована гаусовою функцією.

Формалізована задача вибору оптимальної кількості паралельно працюючих агрегатів має у своєму складі критерій оптимальності як нечітку величину і обмеження визначаються заданим обсягом на перекачуванні природного газу компресорною станцією і максимально допустимою кількістю агрегатів у кожній групі нагнітачів.

Введення нечіткості породжує дискретну задачу нелінійного програмування з лінійними обмеженнями. Для її розв'язування використано метод меж і гілок, на основі якого розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення. Програмне забезпечення апробоване на розробленому прикладі, де використані дані, що визначають роботу компресорної станції.

Ключові слова: компресорна станція, паралельні агрегати, невизначеність, оптимальність, критерій, обмеження, дискретне програмування.

Для случая, когда компрессорная станция, где работают параллельно включенные газоперекачивающие агрегаты, имеет избыточную мощность, возникает задача оптимального выбора количества агрегатов по определенному критерию. Сформированный в работе критерий имеет две составляющие. Первая составляющая – стоимость топливного газа, потребляемого компрессорной станцией. Вторая составляющая – экологический налог, начисляемый за выбросы оксидов азота в окружающую среду. Для вычисления второй составляющей синтезирована эмпирическая модель в виде полинома заданной степени, параметры и структура которой определены с использованием генетических алгоритмов. Такая модель характеризует зависимость мощности выбросов оксидов азота от технологических параметров, характеризующих процесс сжигания природного газа в камере сгорания.

В поставленной задаче мощности выбросов исчисляются по средним значениям технологических параметров, что порождает их нечеткость. Каждый параметр как нечеткая величина характеризуется треугольной функцией принадлежности, которая аппроксимирована гауссовой функцией.

Формализованная задача выбора оптимального количества параллельно работающих агрегатов имеет в своем составе критерий оптимальности как нечеткую величину и ограничения определяются заданным объемом на перекачку природного газа компрессорной станцией и максимально допустимым количеством агрегатов в каждой группе нагнетателей.

Введение нечеткости порождает дискретную задачу нелинейного программирования с линейными ограничениями. Для ее решения использован метод границ и ветвей, на основе которого разработано алгоритмическое и программное обеспечение. Программное обеспечение апробировано на разработанном примере, где использованы данные, определяющие работу компрессорной станции.

Ключевые слова: компрессорная станция, параллельные агрегаты, неопределенность, оптимальность, критерий, ограничения, дискретное программирование.

For a case where the compressor station, where the parallel-supplied gas-pumping units operate, has an excess capacity, the problem of optimal choice of the number of aggregates by a certain criterion arises. The prevailing criterion has two components. The first component is the cost of the fuel gas consumed by the compressor station. The second component is the ecological tax charged for the release of nitrogen oxides into the environment. To calculate the second component, an empirical model is synthesized in the form of a polynomial of a given degree which parameters and structure are determined using genetic algorithms. Such a model characterizes the dependence of the power of emissions of nitrogen oxides on the technological parameters that characterize the process of combustion of natural gas in the combustion chamber.

In the generated problem of power emissions are calculated by the average values of technological parameters, which generates their fuzziness. Each parameter is characterized as the fuzzy value by a triangular membership function that is approximated by the Gaussian function.

The formalized problem of choosing the optimal number of parallel operating units has in its composition the optimality criterion as fuzzy value and the limitations are determined by the given volume of pumped natural gas by the compressor station and the maximum allowable number of aggregates in each group of superchargers.

The introduction of fuzziness generates a discrete nonlinear programming problem with linear constraints. For its solution, the method of boundaries and branches is used, on the basis of which algorithms and software are developed. The software is tested on the developed example, where the data used to determine the operation of the compressor station is used.

Keywords: compressor station, parallel aggregates, uncertainty, optimality, criterion, restriction, discrete programming.

Вступ

Газотранспортна система (ГТС) України здійснює постачання природного газу як до країн Центральної і Західної Європи, так і внутрішнім споживачам. У силу цілого ряду причин ГТС України має надлишкову потужність, тобто частина агрегатів компресорних станцій є недовантаженою. Агрегати компресорних станцій, як правило, працюють паралельно і мають різний технічний стан. У зв'язку з цим виникає задача визначення оптимальної кількості паралельно працюючих агрегатів з врахуванням їх технічного стану, виходячи із певного критерію оптимальності, за умови, що буде забезпечений заданий обсяг перекачування природного газу компресорною станцією.

Компресорні станції мають у своєму складі відцентрові нагнітачі значної потужності з газотурбінним приводом, які споживають газу 0,5-1,5 % від обсягу перекачування.

Спалювання значної кількості природного газу в камерах згоряння газотурбінного привода спричиняє значні викиди шкідливих речовин у навколишнє середовище, що негативно впливає на стан атмосфери, призводить до суттєвих змін у ґрунтах, водоймах і в рослинному світі.

У камерах згоряння утворюється безліч шкідливих продуктів, таких як оксиди вуглецю, азоту. Із усіх забруднюючих речовин, які викидаються в атмосферу, значну частку до (24,5%) складає оксид азоту [1], який характеризується значною токсичністю. Його гранично допустима концентрація (ГДК) складає [2] $0,085 \text{ мг/м}^3$ (порівняно з ГДК 5 мг/м^3 оксиду вуглецю). Тому при розв'язуванні задачі вибо-

ру оптимальної кількості паралельно працюючих агрегатів виникає необхідність у включенні до критерію оптимальності складової, яка визначає не тільки вартість паливного газу, але й затрати на екологічний податок, що дасть змогу зменшити як експлуатаційні затрати, так і потужність викидів оксидів азоту в атмосферу.

Мета роботи. Розроблення методу, алгоритмічного і програмного забезпечення задачі оптимального розподілу паралельно працюючих агрегатів за критерієм, який враховує екологічний податок на викиди нітрату азоту.

Методи досліджень. Правила нечіткої арифметики для врахування невизначеності при вимірюванні технологічних параметрів; теорія генетичних алгоритмів для синтезу емпіричних моделей оптимальної складності; методи розв'язування задач дискретного нелінійного програмування.

Аналіз літературних джерел

На 70-ті роки минулого століття припадає максимальне споживання паливного газу, що зумовило експлуатацію вітчизняних газових магістралей у режимі максимальної пропускної здатності. На теперішній час, коли обсяги постачання природного газу, як правило обумовлені, використовують економічні критерії оптимальності. До них відносять максимум коефіцієнта корисної дії, мінімум енергетичних затрат та паливного газу [3].

Основним елементом газотранспортної системи є компресорні станції, де встановлені газоперекачувальні агрегати, які забезпечують

транспортування природного газу у визначених об'ємах. Їх ефективна робота значною мірою характеризується кількістю спожитого паливного газу, що і зумовило значну увагу дослідників до проблеми ефективного використання енергетичних ресурсів. У роботах [4, 5] для мінімізації сумарної затраченої потужності на транспортування газу запропоновано перерозподіляти навантаження між працюючими агрегатами. Для випадку, коли на компресорній станції установлені відцентрові нагнітачі природного газу з різними типами приводів (електричні і газотурбінні двигуни), авторами роботи [6] вирішена задача вибору оптимальної кількості паралельно працюючих агрегатів за критерієм мінімальної вартості енергоносіїв.

Газоперекачувальні агрегати працюють в умовах певної невизначеності, яка зумовлена похибками вимірювань технологічних апаратів, зміною температури і барометричного тиску навколишнього середовища, зношенням вузлів та агрегатів та ін. Тому останнім часом з'явилися наукові праці, де задачі оптимального керування роботою газоперекачувальних агрегатів сформовані у термінах нечіткої логіки [7, 8].

Робота газоперекачувальних агрегатів характеризується значними викидами шкідливих речовин у навколишнє середовище. У роботах з оптимального керування процесом компримування природного газу проблемі врахування екологічного фактору, який зумовлений спалюванням природного газу в камері згоряння газотурбінного двигуна, не приділялось належної уваги.

Отже, метою роботи є розроблення методу, алгоритмів і програмного забезпечення задачі оптимального вибору кількості агрегатів компресорної станції з врахуванням їх технічного стану та екологічного фактору, зумовленого спалюванням природного газу в камерах згоряння газотурбінних приводів відцентрових нагнітачів природного газу.

Метод, алгоритмічне і програмне забезпечення задачі

Газотранспортна система України має надлишкову потужність. Це означає, що кожна компресорна станція, на якій працюють паралельно включені газоперекачувальні агрегати (ГПА) (як правило, з газотурбінним приводом відцентрових нагнітачів природного газу), є недовантаженою. Тому виникає задача оптимального розподілу навантаження між паралельно працюючими агрегатами із врахуванням їх технічного стану [9].

У роботі [10] запропоновано технічний стан ГПА визначати інтегральним показником [11], який є оцінкою технічного стану кожного ГПА. Для цього для кожного вузла ГПА формується показники їх технічного стану. З плином часу відбувається деградація робочих органів вузлів ГПА, що викликає зміну ознак їх технічного стану. У просторі ознак технічний стан у будь-який момент часу відображатиметься деякою точкою. Якщо за даним вузлом вести спостереження впродовж певного часу, то у просторі ознак отримаємо множину точок. Задача полягає у тому, щоб отриману множину точок розбити на окремі області, які будуть асоціюватися з відповідним технічним станом вузла ГПА.

Допускаємо, що компресорна станція має у своєму складі L груп однотипних ГПА. У кожній із груп є N_i ГПА, де $i = \overline{1, L}$. Кожному j -тому вузлу ГПА будемо приписувати деякий рейтинг. Позначимо рейтинг j -того вузла i -го агрегату в групі L так: $r_i^{(j)}$, де $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, N_i}$. Тоді інтегральний показник технічного стану i -го агрегату в групі обчислимо як суму рейтингів його окремих вузлів

$$R_i = \sum_{j=1}^{N_i} r_i^{(j)}. \quad (1)$$

Камера згоряння – один із основних вузлів ГПА [12]. Зміна технічного стану камер згоряння є причиною не тільки зміни техніко-економічних показників роботи ГПА, таких як потужність, продуктивність, коефіцієнт корисної дії та ін., але й причиною збільшення обсягів шкідливих викидів продуктів згоряння в навколишнє середовище [13]. Серед негативних впливів на зовнішнє середовище дуже небезпечними є викиди оксидів азоту [14], які об'єднані загальною формулою NO_x .

Викиди оксидів азоту крім негативного регіонального впливу викликають глобальні зміни, які проявляються в утворенні перистих хмар, що є основною причиною виникнення парникового ефекту [15]. У зв'язку з цим контролюючі органи Міністерства охорони навколишнього природного середовища України посилили контроль за гранично допустимими нормами викидів, у тому числі оксидів азоту. Крім того, уведений екологічний податок на шкідливі викиди [16].

Задачу оптимального вибору кількості паралельно працюючих агрегатів, на відміну від роботи [9], будемо розв'язувати з врахуванням екологічного податку на викиди оксиду азоту в

навколишнє середовище. При цьому допускаємо, що є L груп з N_i , однотипних ГПА, $i = \overline{1, L}$ на роботу кожного із яких витрачається G_i одиниць паливного газу, віднесеного до одиниці часу; відповідно кожний газоперекачувальний агрегат за одиницю часу викидає в навколишнє середовище $E_{p,i}$ одиниць оксидів азоту.

Промінімізуємо загальну вартість паливного газу, яку споживає компресорна станція з врахуванням екологічного податку на викиди оксиду азоту в навколишнє середовище

$$\min : R(\bar{N}) = c \sum_{i=1}^L N_i G_i + c_f \sum_{i=1}^L N_i E_{p,i}, \quad (2)$$

де c – вартість спожитого паливного газу, $грн/м$;

c_f – величина екологічного податку, $грн/м$.

Мінімізувати критерій оптимальності (2) будемо за умови, що компресорна станція повинна забезпечити планове завдання на перекачування газу

$$\sum_{i=1}^L q_i k_T^{(i)} N_i = Q_0, \quad (3)$$

де q_i – продуктивність i -того нагнітача в групі;

$k_T^{(i)}$ – узагальнений коефіцієнт технічного стану i -того нагнітача в групі;

Q_0 – планове завдання компресорній станції на перекачування газу, віднесене до одиниці часу.

Узагальнений коефіцієнт технічного стану i -того нагнітача у групі обчислимо за такою формулою:

$$k_T^{(i)} = \frac{R_i}{\sum_{k=1}^{s_a} R_k}. \quad (4)$$

Кількість агрегатів у групі не повинно перевищувати деяке задане число V_i

$$N_i \leq V_i, \quad i = \overline{1, L}. \quad (5)$$

Крім умов (3) і (5), маємо очевидне обмеження

$$N_i \geq 0, \quad i = \overline{1, L}. \quad (6)$$

Автором роботи [17] встановлено, що потужність викидів оксидів азоту є функцією режимних і конструктивних параметрів. Оскільки в процесі експлуатації камери згоряння її конструктивні параметри практично залишаються незмінними, то потужність викидів оксидів азоту є функцією таких параметрів [17], як тиск P_{ac} і температура T_{ac} на виході осьового компресора, температура на вході турбіни високого

тиску T_{ht} та витрата паливного газу G . Отже, потужність викидів E_p є функцією режимних параметрів P_{ac} , T_{ac} , T_{ht} і G , яку будемо апроксимувати поліномом степені n

$$E_p(\bar{A}, \bar{X}) = \sum_{i=0}^{M-1} A_i \prod_{j=1}^m X_j^{z_{ji}}, \quad (7)$$

де $\sum_{j=1}^m z_{ji} \leq n$;

m – кількість змінних полінома (7);

$$X_1 = P_{ac}, \quad X_2 = T_{ac}, \quad X_3 = T_{ht}, \quad X_4 = G.$$

Кількість членів полінома (7) визначають за такою формулою [18]:

$$M = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

У формулі (7) режимні параметри X_j , $j = \overline{1, m}$ мають різні розмірності і різні масштаби змінних, що часто призводить до втрати точності при обчисленні коефіцієнтів A_i , $i = \overline{0, M-1}$ [19]. Тому змінні X_j , $j = \overline{1, m}$ приведемо до безрозмірного вигляду

$$x_j = \frac{X_j - X_{j,\min}}{X_{j,\max} - X_{j,\min}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

де $x_j \in [0; 1]$, $X_{j,\min}$, $X_{j,\max}$ – мінімальне і максимальне значення розмірної величини X_j , $j = \overline{1, m}$.

Тоді рівняння полінома (7) набуде такого вигляду:

$$E_p(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \prod_{j=1}^m x_j^{z_{ji}}, \quad (9)$$

де a_i , $i = \overline{0, M-1}$ – коефіцієнти полінома $E_p(\bar{a}, \bar{x})$, які будуть мати розмірність потужності викидів оксидів азоту.

При побудові емпіричної моделі (9) виникає необхідність у визначенні як коефіцієнтів моделі, так і її структури. Поставлена задача в [20] розв'язана на засадах генетичних алгоритмів. Суть методу полягає у тому, що з кожним коефіцієнтом a_i моделі (9) асоціюється значення 1 або 0, що залежить від того, чи відповідний коефіцієнт a_i включений в модель або він відсутній в моделі (9). У результаті отримуємо упорядковану послідовність одиниць і нулів, яка у теорії генетичних алгоритмів має назву хромосоми. З використанням функції пристосування, якою є критерій регулярності або критерій мінімуму зміщення [20], вибирається та хромосома, для якої функція пристосування набуває найменше значення.

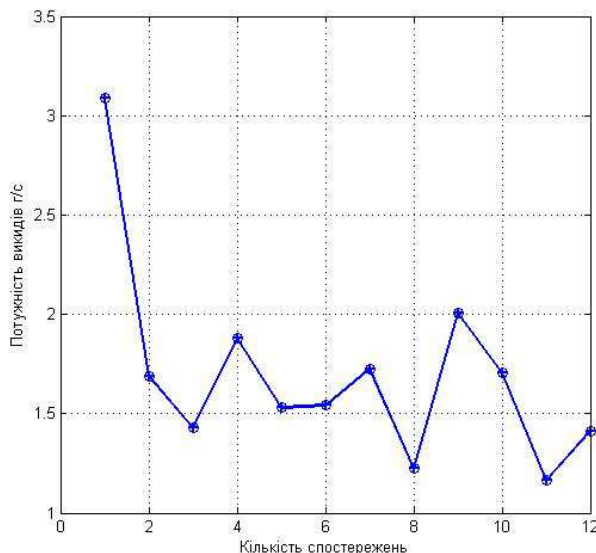
З метою побудови емпіричної моделі (9) на компресорній станції «Любни» УМГ «Київтрансгаз» велись спостереження за роботою ГПА типу ГТ-750-6. Дані спостережень дали змогу побудувати емпіричну модель (9). Були вибрані такі параметри моделі: число змінних – $m=4$; максимальна степінь полінома – $n=3$. За допомогою розробленої програми у середовищі MatLab отримана така модель:

$$E_p(\bar{a}, \bar{x}) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1x_3 + a_5x_1x_4 + a_6x_2x_4 + a_7x_4^2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_1^2x_3 + a_{10}x_2^2x_3 + a_{11}x_1x_3^2 + a_{12}x_3^3 + a_{13}x_1x_2x_4 + a_{14}x_2^2x_4 + a_{15}x_1x_3x_4 + a_{16}x_3^2x_4 + a_{17}x_2x_4^2 + a_{18}x_3x_4^2 + a_{19}x_4^3,$$

де $a_0 = 0,824532, a_1 = 2,821393, a_2 = -1,156632, a_3 = -13,526342, a_4 = 15,496214, a_5 = 2,118090, a_6 = -18,419736, a_7 = 10,572858, a_8 = 46,466761, a_9 = -10,299081, a_{10} = -9,382195, a_{11} = 8,977795, a_{12} = -12,677941, a_{13} = -44,305129, a_{14} = -7,021479, a_{15} = -3,219769, a_{16} = -20,507861, a_{17} = 49,405028, a_{18} = 36,002186, a_{19} = -25,784940.$

Відмітимо, що кількість членів повного полінома (9) скала б $M=35$. Застосування генетичного алгоритму дозволила скоротити кількість таких членів до 20.

На рис. 1 показаний результат побудови емпіричної моделі за співвідношенням (10).



«+» - експериментальні дані;
«o» - розрахункові дані

Рисунок 1 – Апроксимація експериментальних даних поліномом третьої степені

Реалізація алгоритму оптимального розподілу паралельно працюючих агрегатів за критерієм оптимальності (2) при обмеженнях (3), (5) і (6) передбачає, що за роботою агрегату ведуться спостереження протягом певного часу. За результатами таких спостережень визначаються середні значення величин P_{ac}, T_{ac}, T_{ht} і G , що входять до критерію оптимальності (2). Тому режимні параметри P_{ac}, T_{ac}, T_{ht} і G будемо вважати нечіткими числами з трикутними функціями належності.

Нехай в процесі спостереження за агрегатом за певний час T зафіксовані максимальні і мінімальні $X_{i,Max}$ і $X_{i,Min}, i = \overline{1, m}$ значення i -того параметру. Приведемо отримані значення параметрів до безрозмірного вигляду:

$$x_{i,Max} = \frac{X_{i,Max} - X_{i,Min}}{\pi_i}, i = \overline{1, m},$$

$$x_{i,Min} = \frac{X_{i,Min} - X_{i,Min}}{\pi_i}, i = \overline{1, m}$$

де $\pi_i = X_{j,max} - X_{j,min}; X_{i,Min} < X_{i,min}$.

Визначимо середнє значення

$$x_{i,c} = \frac{x_{i,Min} + x_{i,Max}}{2}, i = \overline{1, m},$$

та інтервал зміни i -того параметру

$$\Delta_i = x_{i,Max} - x_{i,Min}, i = \overline{1, m}.$$

Тоді функція належності $\mu(x_i)$ i -того параметру буде мати вигляд, який показаний на рис. 2.

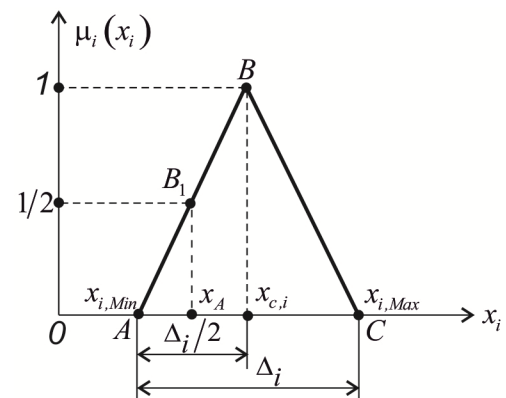


Рисунок 2 – Трикутна функція належності нечіткої величини

Трикутна функція належності (рис. 2) описується такою залежністю [7]:

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_i}(x_i - x_{i,c}) + 1, & x_i \in \left[x_{i,c} - \frac{\Delta_i}{2}; x_{i,c} \right], \\ -\frac{2}{\Delta_i}(x_i - x_{i,c}) + 1, & x_i \in \left[x_{i,c}; x_{i,c} + \frac{\Delta_i}{2} \right]. \end{cases} \quad (11)$$

Функція належності (11) є незручною для практичного використання, оскільки вона має кусково-неперервну форму, крім того, в точках A, B і C (рис. 2) відсутні похідні. Тому у роботі [7] її запропоновано апроксимувати гаусовою функцією належності

$$\mu_i(x_i) = \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i,c})^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (12)$$

Параметр концентрації нечіткості σ_i вибраний таким, щоб функція належності (11) проходила через точку B_1 з координатою $B_1(x_A; 1/2)$ (рис. 2).

Виконання останньої умови дає такий результат [7]:

$$\sigma_i^2 = k_\sigma \Delta_i^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

де $k_\sigma = \frac{1}{32 \ln 2}$.

З врахуванням співвідношення (13), функція належності (12) буде такою:

$$\mu_i(x_i) = \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i,c})^2}{k\Delta_i^2}\right), \quad (14)$$

де $k = \frac{1}{16 \cdot \ln 2}$.

Розглянемо нечіткі величини P_{ac}, T_{ac}, T_{ht} і G , які приведені до безрозмірних одиниць $x_i, i = \overline{1, m}$, як нечіткі числа $(L-R)$ типу, функції належності яких є композицією L і R функцій [21]

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} L\left(\frac{x_{c,i} - x_i}{\alpha_i}\right), & x_i \leq x_{c,i}, \\ R\left(\frac{x_i - x_{c,i}}{\beta_i}\right), & x_i > x_{c,i}, \end{cases}$$

де $x_{c,i}$ – мода нечіткого числа; α_i, β_i – лівий і правий коефіцієнти нечіткості.

Для нечітких чисел $(L-R)$ типу використовують такий запис: $Z_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$.

У тому випадку, коли нечітке число має функцію належності (14), тоді $\alpha = \beta$ і $Z_{LR} = \langle a, \alpha, \alpha \rangle$.

Із співвідношення (8) для $i = m$ ($m = 4$) виразимо G_i через $x_{m,i}$. Маємо

$$G_i = \pi_{4,i} x_{m,i} + G_{i,\min}.$$

Підставляючи знайдене значення G_i у вираз (2), отримаємо

$$\min : R(\bar{N}) = \sum_{i=1}^L (cN_i \pi_{m,i} x_{m,i} + c_f N_i E_{p,i}) + \sum_{i=1}^L c_i N_i G_{i,\min}. \quad (15)$$

Введемо таке позначення:

$$R_1 = \sum_{i=1}^L (cN_i \pi_{m,i} x_{m,i} + c_f N_i E_{p,i}). \quad (16)$$

Оскільки частина критерію (15) R_1 є функцією режимних параметрів P_{ac}, T_{ac}, T_{ht} і G , які інтерпретуються як нечіткі числа, то його значення слід розглядати як нечітке число з функцією належності $\mu(R_1)$.

Знайдемо функції належності першого і другого доданків, що знаходяться під оператором суми у виразі (16).

Вираз $\gamma_{1,i} = cN_i \pi_{m,i} x_{m,i}$ є добутком нечіткої величини $x_{m,i}$ на постійну величину $cN_i \pi_{m,i}$. Відомо [21], що функція належності результату множення постійної величини на гаусове нечітке число буде гаусовою з такими параметрами [21]:

$$m_{\gamma_{1,i}} = cN_i \pi_{m,i} x_{c,i}^{(m)}, \quad \sigma_{\gamma_{1,i}}^2 = (cN_i \pi_{m,i})^2 k \Delta_{m,i}^2, \quad i = \overline{1, L}. \quad (17)$$

Друга складова, яка знаходиться під знаком суми у виразі (16), є також нечіткою величиною. Аналогічно з попереднім результатом для $\gamma_{2,i} = c_f N_i E_{p,i}$ будемо мати такі параметри:

$$m_{\gamma_{2,i}} = c_f N_i m_{E,i}, \quad \sigma_{\gamma_{2,i}}^2 = (c_f N_i)^2 \sigma_{E,i}^2, \quad i = \overline{1, L}. \quad (18)$$

У роботі [22] показано, що для полінома, який заданий виразом (9), модальне значення $m_{\gamma_{2,i}}$ і параметр концентрації нечіткості $\sigma_{\gamma_{2,i}}^2$ визначаються за такими формулами:

$$m_{E,i} = \sum_{j=0}^{M-1} a_j \prod_{k=1}^m (x_{c,k}^{(i)})^{\varphi_{jk}}, \quad (19)$$

$$\sigma_{E,i}^2 = k \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2 \left(\sum_{r=1}^m \Delta_{r,i}^2 \varphi_{jr} (x_{c,r}^{(i)})^{\varphi_{jr}-1} \prod_{\substack{q=1, \\ q \neq i}}^m (x_{c,q}^{(i)})^{\varphi_{jq}} \right),$$

де φ_{jk} – степені полінома (9), які є елементами

$$\text{матриці } \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{01} & \varphi_{02} & \cdots & \varphi_{0m} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{M-1,1} & \varphi_{M-1,2} & \cdots & \varphi_{M-1,m} \end{bmatrix}.$$

Знаючи параметри нечітких величин $\gamma_{1,i}$ і $\gamma_{2,i}$, знайдемо їх суму. Як показано в роботі, [22]

$$m_{R,i} = m_{\gamma_{1,i}} + m_{\gamma_{2,i}}, \quad \sigma_{R,i}^2 = \sigma_{\gamma_{1,i}}^2 + \sigma_{\gamma_{2,i}}^2. \quad (20)$$

Оскільки кожна складова у правій частині виразу (16) має гаусову функцію належності, то їх сума також буде мати [21] гаусову функцію належності. Поширюючи операцію знаходження суми нечітких множин на кінцеве число доданків [22], отримаємо

$$m_{R_1} = \sum_{i=1}^L m_{R,i}, \quad \sigma_{R_1}^2 = \sum_{i=1}^L \sigma_{R,i}^2.$$

Якщо врахувати формули (20), то будемо мати

$$m_{R_1} = \sum_{i=1}^L \left(c N_i \pi_{m,i} x_{c,i}^{(m)} + c_f N_i m_{E,i} \right),$$

$$\sigma_{R_1}^2 = \sum_{i=1}^L \left(\sigma_{\gamma_{1,i}}^2 + \sigma_{\gamma_{2,i}}^2 \right).$$

Приймаючи до уваги значення $m_{\gamma_{1,i}}$, $m_{\gamma_{2,i}}$, $\sigma_{\gamma_{1,i}}^2$ і $\sigma_{\gamma_{2,i}}^2$, які обчислюються за формулами (17) і (18), приходимо до такого результату:

$$m_{R_1} = \sum_{i=1}^L \left(c N_i \pi_{m,i} x_{c,i}^{(m)} + c_f N_i m_{E,i} \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{R_1}^2 = \sum_{i=1}^L \left(k \left(c N_i \pi_{m,i} \right)^2 \Delta_{m,i}^2 + \left(c_f N_i \right)^2 \sigma_{E,i}^2 \right).$$

Враховуючи значення $\sigma_{E,i}^2$, яке визначено формулою (19), будемо мати

$$\sigma_{R_1}^2 = k \sum_{i=1}^L \left(\left(c N_i \pi_{m,i} \right)^2 \Delta_{m,i}^2 + \left(c_f N_i \right)^2 \Lambda_i \right), \quad (22)$$

$$\text{де } \Lambda_i = \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2 \left(\sum_{r=1}^m \Delta_{r,i}^2 \varphi_{jr} \left(x_{c,r}^{(i)} \right)^{\varphi_{jr}-1} \prod_{\substack{q=1, \\ q \neq i}}^m \left(x_{c,q}^{(i)} \right)^{\varphi_{jq}} \right).$$

Оскільки у виразі (16) кожна складова є нечіткою величиною з гаусовою функцією належності, то нечітка величина R_1 також матиме гаусову функцію належності [21]

$$\mu(R_1) = \exp \left(- \frac{\left(R_1 - m_{R_1} \right)^2}{2 \sigma_{R_1}^2} \right). \quad (23)$$

Для функції належності (23) визначимо γ -зріз. Тоді

$$\exp \left(- \frac{\left(R_1 - m_{R_1} \right)^2}{2 \sigma_{R_1}^2} \right) = \gamma.$$

З останнього рівняння знаходимо, що

$$R_1 = m_{R_1} + \sigma_{R_1} \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma}}.$$

Підставляючи значення R_1 в критерій оптимальності (15) та враховуючи значення m_{R_1} і

σ_{R_1} , які визначені формулами (21) і (22), отримаємо

$$\min : R(\bar{N}) = c \sum_{i=1}^L N_i \left(\pi_{m,i} x_{c,i}^{(m)} + \right. \quad (24)$$

$$\left. + \frac{c_f}{c} \sum_{j=0}^{M-1} a_j \prod_{k=1}^m \left(x_{c,k}^{(i)} \right)^{\varphi_{jk}} + G_{i,\min} \right) + \sigma_{R_1} \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma^2}};$$

$$\text{де } \sigma_{R_1} = c \left(k \sum_{i=1}^L \left(\left(N_i \pi_{m,i} \right)^2 \Delta_{m,i}^2 + \left(\frac{c_f}{c} N_i \right)^2 \Lambda_i \right) \right)^{1/2}.$$

$$\Lambda_i = \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2 \left(\sum_{r=1}^m \Delta_{r,i}^2 \varphi_{jr} \left(x_{c,r}^{(i)} \right)^{\varphi_{jr}-1} \prod_{\substack{q=1, \\ q \neq i}}^m \left(x_{c,q}^{(i)} \right)^{\varphi_{jq}} \right).$$

Таким чином, з врахуванням нечіткості технологічних параметрів P_{ac} , T_{ac} , T_{ht} і G , які інтерпретуються як нечіткі числа, необхідно мінімізувати критерій оптимальності (24) з врахуванням обмежень (3), (5) і (6).

Введення нечіткості технологічних параметрів призводить до появи додаткового доданку в критерії оптимальності $\sigma_{R_1} \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma^2}}$, що є

своєрідною «платою» за певну невизначеність при усередненні значень P_{ac} , T_{ac} , T_{ht} і G . Крім того, поява нечіткості перетворює початкову задачу лінійного програмування (2) з обмеженнями (3), (5) і (6) в задачу дискретного нелінійного програмування з критерієм оптимальності (24) та обмеженнями (3), (5) і (6).

Отже, маємо задачу нелінійного дискретного програмування. Множину всіх допустимих розв'язків, які утворюють обмеження (3), (5) і (6), позначимо як N_x . Множина N_x вміщує кінцеве число елементів (допустимих розв'язків) - $0 \leq |N_x| = N_d$, де N_d - число елементів множини N_x . У силу кінцевого значення N_x всі розв'язки можна пронумерувати $\bar{N}^{(1)}, \bar{N}^{(2)}, \dots, \bar{N}^{(N_d)}$, обчислити значення критерію оптимальності (24) і серед цих значень вибрати найменше. Такий метод розв'язування задачі дискретного програмування носить назву повного перебору [23].

При реалізації методу повного перебору виникають певні труднощі пов'язані з необхідністю визначення кількості елементів N_d множини N_x , яка може бути значною, що призводить до значного збільшення обсягу обчислень.

Зменшити обсяг перебору розв'язків задачі дискретного нелінійного програмування можна, використавши метод меж і гілок [23, 24].

Розв'язування задачі дискретного нелінійного програмування методом меж і гілок зводиться до послідовності задач, кожна із яких розв'язується з відкинутими умовами щодо цілочисельності.

Отже, мінімізується критерій оптимальності (24) при наявності обмежень (3), (5) і (6) і з відкинутою умовою цілочисельності щодо значень $N_j \geq 0, j = \overline{1, L}$. Отриманий розв'язок задачі $N_j^* \geq 0, j = \overline{1, L}$ буде лежати в інтервалі $[N_j^*] \leq N_j \leq [N_j^*] + 1$, де $[N_j^*]$ – ціла частина числа N_j^* . Можливе ціле значення N_j буде задовольняти двом умовам $N_j \leq [N_j^*]$ і $N_j \geq [N_j^*] + 1$. Отримані співвідношення породжують розгалуження початкової задачі на дві підзадачі з додатковими умовами $N_j \leq [N_j^*]$ для першої задачі і $N_j \geq [N_j^*] + 1$ – для другої підзадачі.

На кожному етапі розв'язування задачі процес розгалуження повторюється до досягнення цілочисельності змінних $N_{1,j}^{(0)} \geq 0, j = \overline{1, L}$. При цьому фіксується значення критерію оптимальності (24) як верхня його межа $R(\bar{N}_1^{(0)})$, яка є рекордом задачі. Після цього розв'язуються не переглянуті альтернативні підзадачі, і процес їх розв'язання методом меж і гілок продовжується до отримання нового цілочисельного значення $N_{2,j}^{(0)} \geq 0, j = \overline{1, L}$. Фіксується нове значення $R(\bar{N}_2^{(0)})$ критерію оптимальності (24) і в тому випадку, коли $R(\bar{N}_2^{(0)}) \leq R(\bar{N}_1^{(0)})$ значення $R(\bar{N}_2^{(0)})$ буде новим рекордом задачі. Алгоритм розв'язання задачі закінчується після перегляду всіх підзадач, які отримані в результаті розгалуження. Як розв'язок вибирається найменший рекорд.

Знайдений цілочисельний розв'язок задачі може не задовольняти обмеження (3). У тому випадку, коли

$$\sum_{i=1}^L q_i k_T^{(i)} N_i^* - Q_0 < 0,$$

почергово до кожної групи ГПА додаватимемо один агрегат, обчисливши при цьому критерій

оптимальності (24). Та група агрегатів, для якої із обчислених значень критерій оптимальності набуде найменшого значення, і визначить кінцевий розв'язок задачі. При цьому доданий агрегат буде недовантаженим на величину

$$\Delta q_s = \sum_{i \in \{1 \dots L-1\}} q_i k_T^{(i)} N_i^* + q_s k_T^{(s)} (N_s^* + 1),$$

де $s \in \{1 \dots L\}$ – номер групи ГПА, до якої додано один агрегат.

У протилежному випадку, коли

$$\sum_{i=1}^L q_i k_T^{(i)} N_i^* - Q_0 > 0,$$

продуктивність одного із агрегатів треба зменшити так, щоб виконувалась умова (3).

Програмне забезпечення алгоритму методу меж і гілок для задачі (24) з обмеженнями (3), (5) і (6) реалізоване у програмному середовищі MatLab, яке пройшло тестування на прикладі, який частково запозичений з роботи [8].

Компресорна станція складається із трьох груп нагнітачів природного газу з газотурбінним приводом. Кількість нагнітачів між групами розподілені так: перша група – 3; друга група – 7; третя група – 4. Загальна продуктивність нагнітачів для кожної із трьох груп складає: для першої групи – $1782000 \text{ м}^3/\text{год}$; для другої групи – $2749300 \text{ м}^3/\text{год}$; для третьої групи – $2371680 \text{ м}^3/\text{год}$. Заданий обсяг на транспортування газу – $3700800 \text{ м}^3/\text{год}$. Вартість паливного газу – $10226 \text{ грн}/\text{т}$; екологічний податок на викиди оксиду азоту – $2451,84 \text{ грн}/\text{т}$.

Допустимо, що для всіх газоперекачувальних агрегатів потужність екологічних викидів однакова і як функція технологічних параметрів P_{ac} , T_{ac} , T_{ht} і G визначається рівнянням регресії (10). Крім того, допускаємо, що $G_{i,\min} = \text{const}$ для всіх груп ГПА і складає $G_{i,\min} = 2,88 \text{ кг}/\text{с}$; $\pi_{m,i} = 1,4327 \text{ кг}/\text{с}$, $\forall i$. Були визначені узагальнені коефіцієнти технічного стану для кожної групи нагнітачів [8]: перша група – 0,916; друга група – 0,920; третя група – 0,953.

Оскільки технологічні параметри P_{ac} , T_{ac} , T_{ht} і G приведені до безрозмірної шкали $[0; 1]$, то $\Delta_{m,i} = 1$, $\Delta_{r,i} = 1$ і всі середні значення параметрів, які подані в безрозмірній формі, $x_c = \frac{1}{2}$.

З врахуванням прийнятих допущень критерій оптимальності (24) набуде такого вигляду:

$$\min : R(\bar{N}) = c \sum_{i=1}^L N_i \left(\frac{\pi_{m,i}}{2} + \frac{c_f}{c} \sum_{j=0}^{M-1} 2^{\nu_j} a_j + G_{i,\min} \right) + \sigma_{R_i} \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma^2}}, \quad (25)$$

$$\text{де } \sigma_{R_i} = c \left(k \sum_{i=1}^L \left(N_i \pi_{m,i} \right)^2 + \left(\frac{c_f}{c} N_i \right)^2 \Lambda \right)^{1/2};$$

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2 \left(\sum_{r=1}^m 2^{-(\varphi_{jr} + \theta_j)} \varphi_{jr} \right);$$

$$\nu_j = - \sum_{k=1}^m \varphi_{jk}; \quad \theta_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \varphi_{jk}.$$

Отже, при прийнятих припущеннях будемо мінімізувати (25) за обмежень (3), (5) і (6). У формулі (25) всі величини були приведені до розмінностей системи СІ.

Обчислення виконані за розробленою машинною програмою дали такий результат:

- кількість нагнітачів: у першій групі – $N_1^* = 3$; у другій групі – $N_2^* = 0$; у третій групі – $N_3^* = 4$;

- вартість роботи компресорної станції $R(\bar{N}^*) = 274,85 \text{ грн/с}$;

- значення розбалансування $\sum_{i=1}^L q_i k_T^{(i)} N_i^* - Q_0 = 53,26 \text{ м}^3/\text{с}$. Це означає, що один із відцентрових нагнітачів природного газу недовантажений на величину $53,26 \text{ м}^3/\text{с}$.

Висновки

Сформована і розв’язана задача оптимального розподілу кількості паралельно працюючих агрегатів з врахуванням нечіткості технологічних параметрів, яка виникає внаслідок їх усереднення. Критерій оптимальності враховує не тільки вартість паливного газу, але й величину екологічного податку на викиди оксиду азоту компресорною станцією. Включення до критерію оптимальності екологічного податку зробило необхідністю визначення функціональної залежності потужності викидів оксидів азоту від технологічних параметрів, яка була взята у вигляді полінома певної степені. Параметри та структура такої функціональної залежності визначені на засадах генетичних алгоритмів.

Розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення задачі оптимального розподілу навантаження між паралельно працюючими газо-

перекачувальними агрегатами, яке пройшло апробацію на розробленому прикладі, дані для якого взяті із умов експлуатації ГПА.

Література

1. Семчук Я. М., Чабанович Л. Б. Оцінка впливу компресорних станцій магістральних газопроводів на навколишнє середовище. *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. Серія: Розробка та експлуатація нафтових і газових родовищ. 1996. Вип. 3. С. 141 – 145.

2. Михайлик Ю. Д. Підвищення рівня екологічної безпеки атмосферного повітря в районах розташування компресорних станцій: дис. ... канд. техн. наук: 21.06.01 / Івано-Франківський нац. техн. ун-т нафти і газу. Івано-Франківськ, 2016. 161 с.

3. Гарляускас А. И. Математическое моделирование оперативного и перспективного планирования систем транспорта газа. М.: Недра, 1975. 155 с.

4. Прищепко О. О. Удосконалення роботи ГПА на основі їх фактичних характеристик: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.14.06. Харків, 2001. 18 с.

5. Слободчиков К. Ю. Методи та моделі розподілу навантаження між газоперекачувальними агрегатами компресорного цеху. *Науковий вісник Івано-Франківського нац. техн. ун-ту нафти і газу*. 2008. № 2. С. 106-114.

6. Горбійчук М. І., Ковалів Є. О. Оптимальне керування роботою компресорних станцій за критерієм мінімальних енерговитрат. *Нафтогазова енергетика*. 2006. № 1(1). С. 57 – 62.

7. Gorbiychuk M., Pashkovskiy V., Moysenko O., Sabat N. Solution of the optimization problem of the control over operation of gas pumping units under fuzzy conditions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Information technology. Industry control system*. 2017. Vol. 5. No 2(89). P. 65-71.

8. Горбійчук М. І., Скріпка О. А., Пашковський Б. В. Оптимальний розподіл кількості газоперекачувальних агрегатів в умовах невизначеності при заданих обсягах на перекачку природного газу. *East European Scientific Journal*. 2016. Vol. 2. No 3(7). P. 53–58.

9. Горбійчук М. І., Скріпка О. А., Пашковський Б. В. Оптимальний розподіл кількості газоперекачувальних агрегатів в умовах невизначеності при заданих обсягах на перекачку природного газу. *East European Scientific Journal*. 2016. Vol. 2. No 3(7). P. 53 – 58.

10. Горбійчук М. І., Лазорів А. М., Луцок І. І. Алгоритми оптимального керування процесом компримування природного газу. *Нафтогазова енергетика*. 2011. № 2(15). С. 48 – 56.
11. Горбійчук М. І., Щупак І. В., Кімак В. Л. Метод інтегральної оцінки технічного стану газоперекачувальних агрегатів. *Нафтогазова енергетика*. 2010. № 2(13). С. 38– 43.
12. Пчелкин Ю. М. Камеры сгорания газотурбинных двигателей: учебник. 3-е изд. перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1984. 280 с.
13. Мірзоева О. Ю. Аналіз існуючих методів моделей технічних засобів контролю викидів шкідливих речовин з камери згорання. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського*. 2017. Випуск 3/(104). Частина 1. С. 100 – 105.
14. Реграги А., Любчик Г. Н., Рокитько К. В. Универсальная методика аудита эмиссии оксидов азота в камерах сгорания ГТУ. *Энергетика: економіка технології екологія*. 2009. № 2. С. 19 – 26.
15. Дедеш В.Т., Тенишев Р. Х., Леут А. П. [и др]. Необходимость разработки методик летных исследований условий образования и существования конденсационных следов самолетов с ГТД в крейсерских полетах. *Научно-технический конгресс по двигателестроению* : сб. докл. 9-ого Международного Салона «Двигатели-2006». М., 2006.
16. Бабін М. Є., Дубовський С. В., Коберник В. С., Рейсіг В.А. Емісія оксидів азоту в теплоенергетичних установках. *Проблеми загальної енергетики*. 2008. № 17. С. 46 – 49.
17. Митрофанов В. А. Закономерности образования вредных веществ и повешение экологичности ГТД; автореф. дисс. ... канд. техн. наук. СПб, 2000. 18 с.
18. Горбійчук М., І. Лазорів О. Т. Метод моделювання рівня води у ріках Прикарпаття на засадах генетичних алгоритмів. *Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів «Інформаційні технології в освіті техніці та промисловості» м. Івано-Франківськ 6 – 9 жовтня 2015 р.* Івано-Франківськ : ІФНТУНГ 2015. С. 28 – 30.
19. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами : пер. с англ. В. Д. Скаржинского. М. : Мир, 1973. 957 с.
20. Горбійчук М. І., Шуфранович М. А. Метод побудови математичних моделей складних процесів на засадах генетичних алгоритмів. *Штучний інтелект*. 2010. № 4. С. 50 – 57.
21. Раскин Л. Г., Серая О. В. Нечеткая Математика. Основы теории. Приложения. Раскин: Монография. Харьков: Парус, 2008. 352 с.
22. Горбійчук М. І., Гуменюк Т. В. Метод синтеза оптимальных по сложности эмпирических моделей в условиях неопределенности. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 5. С. 24 – 32.
23. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М. : Физматлит, 2002. 240 с.
24. Горбійчук М. І. Математичні методи оптимізації : навч. посіб. Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2018. 302 с.

References

1. Semchuk Ya. M., Chabanovych L. B. Otsinka vplyvu kompresornyh stancij magistralnyh gazoprovodiv na navkolyshnye seredovyshe. *Rozvidka ta rozrobka naftovyh i gazovyh rodovysch*. Seriya: Rozrobka ta ekspluatsiya naftovyp i gazovyp rodovysch. 1996. Vyp. 3. P. 141 – 145.
2. Mykhajliuk Yu. D. Pidvyshchennya rivnya ekologichnoyi bezpeky atmosferного povitrya v rajonah roztashuvannya kompresornyh stancij: dys. ... kand. texn. nauk: 21.06.01 / Ivano-Frankivskij nats. tehn un-t nafty i gazu. Ivano-Frankivsk, 2016. 161 p.
3. Garlyauskas A. I. Matematycheskoe modelirovanye operatyvnogo i perspektyvnogo planirovaniya system transporta gaza. М. : Nedra, 1975. 155 p.
4. Pryshchepko O. O. Udoskonalennya roboty GPA na osnovi ih faktychnyh kharakterystyk : avtoref. dys. ... kand. tehn. Nauk : 05.14.06. Kharkiv, 2001. 18 p.
5. Slobodchikov K. Yu. Metody ta modeli rozpodilu navantazhennya mizh gazoperekachuvalnymy agregatamy kompresornogo tsehu. *Naukovyj visnyk Ivano-Frankivskogo nats. tehn. un-tu nafty i gazu*. 2008. No 2. P. 106-114.
6. Gorbijchuk M. I., Kovaliv Ye. O. Optymalne keruvannya robotoyu kompresornyh stancij za kryteriyem minimalnyh energovytrat. *Naftogazova energetyka*. 2006. No 1(1). P. 57–62.
7. Gorbijchuk M., Pashkovskiy B., Moysenko O., Sabat N. Solution of the optimization problem of the control over operation of gas pumping units under fuzzy conditions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Information technology. Industry control system*. 2017. Vol. 5. No 2(89). P. 65-71.

8. Gorbijchuk M. I., Skripka O. A., Pashkovskij B. V. Optymalnyj rozpodil kilkosti gazoperekachuvalnyh agregativ v umovax nevyznachenosti pry zadanyh obsyagax na perekachku pryrodnogo gazu. *East European Scientific Journal*. 2016. Vo. 2. No 3(7). P. 53–58.
9. Gorbijchuk M. I., Skripka O. A., Pashkovskij B. V. Optymalnyj rozpodil kilkosti gazoperekachuvalnyh agregativ v umovax nevyznachenosti pry zadanyh obsyagax na perekachku pryrodnogo gazu. *East European Scientific Journal*. 2016. Vo. 2. No 3(7). P. 53–58.
10. Gorbijchuk M. I., Lazoriv A. M., Lucyuk I. I. Algoritmy optymalnogo keruvannya protsesom komprymuvannya pryrodnogo gazu. *Naftogazova enoenergyka*. 2011. No 2(15). P. 48–56.
11. Gorbijchuk M. I., Shhupak I. V., Kimak V. L. Metod integralnoyi ocinky tehničnogo stanu gazoperekachuvalnyh agregativ. *Naftogazova enoenergyka*. 2010. No 2(13). P. 38–43.
12. Pchelkyn Yu. M. Kamery sgoraniya gazoturbynnyh dnyratelej: uchebnyk. 3-e izd. pererab. i dop. M. : Mashynostroenye, 1984. 280 p.
13. Mirzoieva O. Yu. Analiz isnuichykh metodiv modelei tehničnykh zasobiv kontroliu vykydiv shkidlyvykh rehovyn z kamery zghorannia. *Visnyk KrNU imeni Mykhaila Ostrohradskoho*. 2017. Vyp. 3(104). Chastyna 1. P. 100–105.
14. Regragy A., Lyubchuk G.N., Rokytko K.V. Unyversalnaya metodyka audyta emyssyy oksydov azota v kamerax sgoraniya GTU. *Energetyka: ekonomika texnologiyi ekologiya*. 2009. No 2. P. 19–26.
15. Dedesh V.T., Tenyshev R. X., Leut A. P. [i dr]. Neobhodymost razrabotky metodyk letnyh issledovaniy uslovij obrazovaniya i sushchestvovaniya kondensacyonnyh sledov samoletov s GTD v krejerskih poletax. *Nauchno-terpnycheskij kongress po dvigatelestroeniyu* : Sb. dokladov. 9-ogo Mezhdunarodnogo Salona «Dvygately-2006». Moskva, 2006.
16. Babin M. Ye., Dubovskij S. V., Kobernyk V. S., Rejsig V.A. Emisiya oksydiv azotu v teploenergetychnykh ustanovkax. *Problemy zagalnoi energetyky*. 2008. No 17. P. 46–49.
17. Mytrofanov V. A. Zakonomernosti obrazovaniya vrednyh veshchestv i povyshenie ekologichnosti GTD: avtoref. dyss. ... kand. tehn. nauk. SPb, 2000. 18 p.
18. Gorbijchuk M., I. Lazoriv O. T. Metod modelyuvannya rivnya vody u rikax Prykarpattya na zasadax genetychnykh alorytmiv. *Materialy II Vseukrainskoyi naukovy-praktychnoyi konferenciyi molodyh ucheny i studentiv «Informacijni tehnologiyi v osviti tehnicji ta promyslovosti» m. Ivano-Frankivsk 6 – 9 zhovtnya 2015 r.* Ivano-Frankivsk : IFNTUNG, 2015. P. 28–30.
19. Khymmelblau D. Analiz processov statystycheskymy metodamy : per. s angl. V. D. Skarzhynskogo. M. : Myr, 1973. 957 p.
20. Gorbijchuk M. I., Shufranovych M. A. Metod pobudovy matematychnykh modelej skladnyh procesiv na zasadax genetychnykh alorytmiv. *Shtuchnyj intelekt*. 2010. No 4. P. 50–57.
21. Raskyn L. G., Seraya O. V. Nechetkaya Matematika. Osnovy teorii. Prylozheniya. Kharkov : Parus, 2008. 352 p.
22. Gorbychuk M. Y., Gumenyuk T. V. Metod synteza optymalnyh po slozhnosti empyrycheskykh modelej v usloviyax neopredelennosti. *Problemy upravleniyya i informatyky*. 2016. No 5. P. 24–32.
23. Sygal Y. X., Ivanova A. P. Vvedeniye i prykladnoe dyskretnoe programmirovaniye: modeli i vychislitelnye algoritmy. M. : Fyzmatlyt, 2002. 240 p.
24. Gorbijchuk M. I. Matematychni metody optymizaciyi: navch. posibnyk. Ivano-Frankivsk : IFNTUNG, 2018. 302 p.