

# МЕХАНІЧНА ІНЖЕНЕРІЯ

УДК 622.245

DOI: 10.31471/1993-9965-2019-1(46)-25-34

## ВИРІШЕННЯ ОСНОВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ОБСАДНОЇ КОЛОНИ У ВИКРИВЛЕНІЙ СВЕРДЛОВИНІ

*I. I. Палійчук**ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15; тел. (0342) 507626,  
e-mail: ihor.pal@ukr.net*

*Колона обсадних труб у криволінійній свердловині працює як довгий нерозрізний стрижень. Вона встановлена на опори-центратори і повторює складний профіль свердловини, внаслідок чого отримує великі деформації. Для їх описання складено систему диференціальних рівнянь рівноваги внутрішніх та зовнішніх сил і моментів, яку доповнено до замкнутого вигляду диференціальним рівнянням кривизни. Вона є неоднорідною, тому що враховує власну розподілену вагу стрижня. Запропоновано два шляхи розв'язання задачі: методом математичної компресії рівнянь системи у комплексне неоднорідне диференціальне рівняння або методом проєкціювання рівнянь рівноваги сил на глобальну (вертикаль-горизонталь) та на локальну (дотична-нормаль) системи координат. Показано, що перший інтеграл системи можна знайти також за рівняннями рівноваги ділянки викривленого стрижня скінченої довжини. Цей інтеграл має вигляд неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами та є основним рівнянням, яке описує деформування довгого пружного стрижня під дією поздовжньої і поперечної складових сил розподіленої ваги. Головною вимогою технології є встановлення колони труб на центрвальних опорах, метою якого є забезпечення співвісності труб і стінок свердловини та створення між ними цементного кільця однакової товщини і міцності. Врахування цієї вимоги дозволило лінеаризувати основне рівняння. За його розв'язком знайдено вирази прогинів, куткових деформацій, внутрішніх згинальних моментів та поперечних сил у стрижні з довільними розташуванням опор і граничними умовами в опорних перетинах. Розв'язок основного диференціального рівняння куткових деформацій довгого стрижня знайдено у вигляді лінійної комбінації функцій Ейрі і Скорера та у вигляді трьох лінійно незалежних поліноміальних рядів у сумі з частинним розв'язком. Одержані вирази деформаційних і силових параметрів дають змогу розрахувати напруження і деформації колони труб під час технологічного процесу кріплення свердловини довільного профілю, що дозволяє підвищити надійність і довговічність її експлуатації.*

*Ключові слова: криволінійна свердловина, обсадна колона, пружний стрижень, деформації згину, функції Ейрі, функції Скорера.*

*Колонна обсадных труб в криволинейной скважине работает как длинный неразрезной стержень. Она установлена на опоры-центраторы и повторяет сложный профиль скважины, вследствие чего получает большие деформации. Для их описания составлена система дифференциальных уравнений равновесия внутренних и внешних сил и моментов, которая дополнена до замкнутого вида дифференциальным уравнением кривизны. Она является неоднородной, потому что учитывает собственный распределенный вес стержня. Предложены два пути решения задачи: по методу математической компрессии уравнений системы в комплексное неоднородное дифференциальное уравнение или по методу проецирования уравнений равновесия сил на глобальную (вертикаль-горизонталь) и на локальную (касательная-нормаль) системы координат. Показано, что первый интеграл системы можно найти также из уравнений равновесия участка искривленного стержня конечной длины. Этот интеграл имеет вид неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и является основным уравнением, которое описывает деформирование длинного упругого стержня под действием продольной и поперечной составляющих сил распределенного веса. Главным требованием технологии является установка колонны труб на центрирующих опорах, целью которой является обеспечение соосности труб и стенок скважины и создание между*

ними цементного кільця однакової товщини і прочності. Учет этого требования позволил линеаризировать основное уравнение. По его решению найдены выражения прогибов, угловых деформаций, внутренних изгибающих моментов и поперечных сил в стержне с произвольными расположением опор и граничными условиями в опорных сечениях. Решение основного дифференциального уравнения угловых деформаций длинного стержня найдено в виде линейной комбинации функций Эйри и Скорера и в виде трех линейно независимых полиномиальных рядов в сумме с частным решением. Полученные выражения деформационных и силовых параметров дают возможность рассчитать напряжения и деформации колонны труб при технологическом процессе крепления скважины произвольного профиля, что позволяет повысить надежность и долговечность ее эксплуатации.

Ключевые слова: криволинейная скважина; обсадная колонна; упругий стержень; деформации изгиба; функции Эйри; функции Скорера.

*In a curvilinear well, the casing functions as a long continuous rod. It is installed on the supports-centralizers and replicates the complex profile of the well, as a result of which it receives large deformations. To describe them, a system of differential equilibrium equations of internal and external forces and moments was composed, which was supplemented to a closed form with a differential equation of curvature. It is non-uniform, because it takes into account the own distributed weight of the rod. Two ways are proposed to solve the problem: by the method of mathematical compression of the system equations into a complex inhomogeneous differential equation or by projecting the equilibrium equations of forces on the global (vertical-horizontal) and on the local (tangent-normal) coordinate systems. It is shown that the first integral of the system can also be found from the equilibrium equations of a portion of a curved rod of finite length. This integral has the form of a second-order inhomogeneous differential equation with variable coefficients and is the main equation that describes the deformation of a long elastic rod under the action of the longitudinal and transverse components of the forces of distributed weight. The main requirement of the technology is the installation of a pipes column on the centering supports, the purpose of which is to ensure the coaxiality of the pipes and the borehole walls and the creation between them a cement ring of the same thickness and strength. Accounting for this requirement allowed us to linearize the main equation. Its solution is the clue to the formulas of deflections, angular slopes, internal bending moments and transverse forces in the rod with the arbitrary arrangement of supports and boundary conditions in their intersections. The solution of the main differential equation of angular deformations of a long bar is found in the form of a linear combination of Airy and Scorer's functions and in the form of three linearly independent polynomial series in the sum with a partial solution. The obtained formulas of flexure and power parameters allow us to calculate stress and strain in the pipes column during the process of casing the borehole of an arbitrary profile which increases the reliability and durability of the well.*

Key words: curvilinear well, casing string, elastic rod, bending, Airy's functions, Scorer's functions.

### Вступ

Технологія надійного та безпечного видобування нафти і газу з великих глибин вимагає кріплення стінок свердловини колоною обсадних труб з обов'язковим цементуванням затрубного простору. Сучасні методи похило скерованого та горизонтального буріння дозволяють досягати продуктивних пластів на глибині 4-7 км при довжині колони 7-10 км, у той час як діаметр сталевих труб складає лише 168-140 мм за товщини стінок 10-12 мм [1]. Типова конструкція свердловини складається з ділянок: вертикальної, похилої (з великим відхиленням від вертикальної) і горизонтальної, які сполучені перехідними викривленими ділянками. Зазвичай усі вони розташовані в одній площині [2].

У свердловині обсадну колону розміщують на центральному пристрої з метою забезпечення співвісності труб і стінок свердловини та створення між ними цементного кільця однакової товщини і міцності [3]. Щоб уникнути великих прогинів та контакту стінок труб і свердловини на викривлених, похилій і горизонтальній

ділянках відстань між центраторами становить 10–20 м [4].

### Аналіз сучасних досліджень і публікацій

У роботі [3] розглянуто деформування обсадних колон на центральному пристрої у похило-скерованих свердловинах. Проте для визначення прогинів труби на ділянках між опорами автори використали модель обпертого стрижня з двома вільними кінцями без врахування поздовжньої складової сили ваги. Насправді ділянки обсадних труб в опорних перетинах зазнають взаємного деформаційно-силового впливу одна від одної. Тому розв'язання задачі вимагає застосування рівнянь сумісності кутів поворотів та рівноваги згинальних моментів у суміжних перетинах ділянок стрижня.

Робота [4] присвячена розв'язанню задачі визначення оптимальної відстані між пружно-жорсткими центраторами обсадної колони у похилій свердловині. Автори розглядали обсадну колону як довгий гнучкий стрижень на опорах і використали диференціальне рівняння його

прогинів. При цьому вони врахували нахилене розміщення стрижня до вертикалі. Отримані результати співпадають з відомим рішенням для довгої нерозрізної балки на опорах під дією розподіленої ваги. Проте автори не брали до уваги її повздовжню складову, яка розтягує колону, досягає великих значень у реальних свердловинах та суттєво впливає на напружено-деформований стан обсадних труб.

Відомі розв'язки [5,6] задачі великих деформацій довгого пружного стрижня, отримані без врахування його власної ваги. У роботі [7] розв'язання відповідної задачі з врахуванням рівномірно розподіленого навантаження проведено за допомогою рядів для консольного стрижня з одним вільним кінцем лише для вертикального і горизонтального розташування защемлення. За результатами цього на основі запропонованого автором принципу пружної подібності розв'язано задачу великих прогинів гнучкого горизонтального стрижня, вільно покладеного на дві опори.

Таким чином, **невирішеною проблемою** залишається знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь, які описують деформування довгого пружного стрижня під дією поздовжньої і поперечної складових сил власної ваги.

### Постановка задачі і мета роботи

Колона обсадних труб працює як довгий нерозрізний стрижень, який опирається на центратори як на шарнірні опори та отримує великі геометричні викривлення осі, повторюючи криволінійну форму свердловини. Внаслідок цього у тілі труб виникає складний напружено-деформований стан, спричинений їх згином та осьовим розтягом чи стиском, від якого залежать надійність та довговічність роботи обсадної колони. При цьому внутрішні деформації металу не повинні виходити за межі пропорційності та закону Гука.

Як показав аналіз [8,9], система диференціальних рівнянь Кірхгофа, яка описує деформування просторово вигнутого стрижня, є однорідною відносно його жорсткості на згин, тому усі силові чинники можна поділити на  $EJ$  ( $E$  – модуль пружності матеріалу;  $J$  – момент інерції попереччя). Отже, не втрачаючи загальності розв'язку, можна розглядати великі пружні деформації довгого стрижня з одиничною жорсткістю на згин; при цьому згинальний момент чисельно дорівнює кривизні стрижня.

**Мета роботи** – визначення виразів деформаційних та силових параметрів, які описують

напружено-деформований стан обсадної колони на неvertикальних ділянках свердловини. Для її досягнення необхідно скласти та розв'язати систему диференціальних рівнянь рівноваги довгого пружного стрижня, який згинається під дією власної ваги в одній площині. Звідси потрібно отримати та дослідити інтеграл основного диференціального рівняння, який дозволяє отримати вирази прогинів, поворотів перетинів, внутрішніх згинальних моментів і поперечних сил у стрижні з довільними розміщенням опор і граничними умовами в опорних перетинах.

### Система рівнянь рівноваги

Виберемо систему координат, звичну для проектування свердловин: вісь  $Z$  спрямована вертикально вниз, вісь  $X$  – у напрямку на епіцентр продуктивного пласту. Згин стрижня відбувається у вертикальній площині  $XOZ$ .

Розглянемо нескінченно малий дуговий елемент зігнутого стрижня довжиною  $ds$ . На його початку дотична нахилена до вертикалі під зенітним кутом  $\vartheta$  та прикладені згинальний момент  $q$  і сили – повздовжня  $t$ , поперечна  $u$  (рис. 1). Тут збережені позначення кута нутації  $\vartheta$  і кривизни  $q$ , запропоновані Л. Ейлером та використані Г. Кірхгофом. У кінцевому перетині, який отримав приріст зенітного кута  $d\vartheta$ , прикладені такі ж силові чинники, але з приростами відповідно  $dq$ ,  $dt$ ,  $du$ , які спрямовані так, щоб зрівноважити початкові. Також на елемент діє розподілена вага стрижня  $j ds$ .

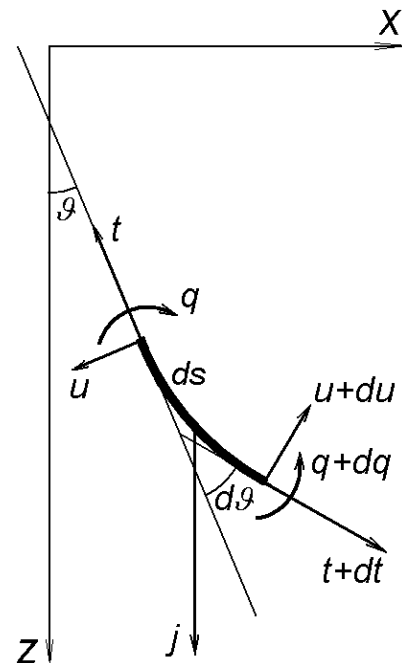


Рисунок 1 – Схема рівноваги елемента викривленого стрижня

Рівняння рівноваги проєкцій сил на нормаль:  

$$-u - j ds \sin \vartheta + (u + du) \cos d\vartheta +$$

$$1 + (t + dt) \sin d\vartheta = 0,$$

$$\frac{du}{ds} + t \frac{d\vartheta}{ds} = j \sin \vartheta.$$

Рівняння рівноваги проєкцій сил на дотичну:  

$$-t + j ds \cos \vartheta + (t + dt) \cos d\vartheta -$$

$$-(u + du) \sin d\vartheta = 0,$$

$$\frac{dt}{ds} - u \frac{d\vartheta}{ds} = -j \cos \vartheta.$$

Рівняння рівноваги моментів кінцевих сил та моментів:

$$-q + (q + dq) + (u + du) \cos d\vartheta \cdot ds \cos d\vartheta -$$

$$-(t + dt) \cos d\vartheta \cdot ds \sin d\vartheta = 0,$$

$$\frac{dq}{ds} + u = 0.$$

Ця система трьох диференціальних рівнянь є незамкнутою, оскільки містить чотири невідомі функції  $\vartheta, u, t, q$ . Для отримання однозначного розв'язку її необхідно доповнити кінематичним рівнянням Ейлера – рівнянням кривизни стрижня в одній площині:

$$q = \vartheta' = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

де  $\rho$  – радіус кривизни; штрих позначає похідну по  $s$ .

Отже, великі деформації довгого стрижня, зігнутого в одній площині під дією власної ваги, описуються неоднорідною системою з чотирьох диференціальних рівнянь:

$$u' + t \cdot \vartheta' = j \sin \vartheta, \quad (1)$$

$$t' - u \cdot \vartheta' = -j \cos \vartheta, \quad (2)$$

$$q' + u = 0, \quad (3)$$

$$\vartheta' - q = 0. \quad (4)$$

### Аналітичний розв'язок

Отримана система містить дві частини. Перші два рівняння (1-2) явно залежать від змінної  $\vartheta$ , тому з них можна виключити змінну  $s$  та, розв'язавши систему, знайти функції  $u$  і  $t$  відносно змінної  $\vartheta$ . Далі інтегруванням рівнянь (3-4) можна знайти залежність  $\vartheta$  від  $s$ .

Для однорідної системи рівнянь (1-2) (без правих частин) виконуються умови Коші-Рімана [10]. Тому можна здійснити їх математичну компресію, домноживши друге рівняння на уявну одиницю  $i = \sqrt{-1}$  та додавши їх:

$$u' + \vartheta' t + i t' - i \vartheta' u = (u + i t)' - i \vartheta' (u + i t) =$$

$$= Z' - i \vartheta' Z,$$

$$j \sin \vartheta - i j \cos \vartheta = -i j e^{i\vartheta},$$

де  $Z = u + i t$  – комплексна функція.

Отримано комплексне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$Z' - i \vartheta' Z = -i j e^{i\vartheta}. \quad (5)$$

Однорідне рівняння  $Z' - i \vartheta' Z = 0$  інтегрується відокремленням змінних; у результаті його розв'язок  $Z = C e^{i\vartheta}$ . Неоднорідне рівняння (5) інтегруємо методом Лагранжа та послідовно отримуємо:

$$Z' = C e^{i\vartheta} i \vartheta' + C' e^{i\vartheta} = Z i q + C' e^{i\vartheta},$$

$$C' e^{i\vartheta} = -i j e^{i\vartheta}, \quad C = -i j s + D,$$

$$Z = D e^{i\vartheta} - i j s e^{i\vartheta}.$$

де  $C$  і  $D$  – комплексні сталі інтегрування.

Розв'язуючи задачу Коші, початкові параметри у перетині з координатою  $s = s_0$  позначимо індексом 0; тоді сталі інтегрування та загальний розв'язок рівняння (5) такі:

$$D = Z_0 e^{-i\vartheta_0} + i j s_0, \quad C = Z_0 e^{-i\vartheta_0} - i j (s - s_0),$$

$$Z = Z_0 e^{i(\vartheta - \vartheta_0)} - i j (s - s_0) e^{i\vartheta}. \quad (6)$$

Розкриємо дві комплексні функції правої частини (6):

$$Z_0 e^{i(\vartheta - \vartheta_0)} = (u_0 + i t_0) (\cos(\vartheta - \vartheta_0) + i \sin(\vartheta - \vartheta_0)) =$$

$$= u_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) - t_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) +$$

$$+ i (t_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + u_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0));$$

$$-i j (s - s_0) e^{i\vartheta} = j (s - s_0) (\sin \vartheta - i \cos \vartheta).$$

Розділенням дійсних і уявних частин комплексної функції  $Z$  (6) отримано розв'язки системи рівнянь (1-2), виражені через функцію  $\vartheta$ :

$$u = u_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) - t_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) +$$

$$+ j (s - s_0) \sin \vartheta, \quad (7)$$

$$t = t_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + u_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) -$$

$$- j (s - s_0) \cos \vartheta. \quad (8)$$

### Проекційний спосіб розв'язання

У роботі [7] застосовано проекційний спосіб перетворення системи рівнянь (1-2). Пропонуємо коротший шлях розв'язання задачі.

Проектуємо діючі сили на вертикаль  $Z$ . Рівняння (2), яке є проєкцією сил на дотичну, домножимо на  $\cos \vartheta$ ; рівняння (1), яке є проєкцією сил на нормаль, домножимо на  $-\sin \vartheta$  і додамо їх:

$$\begin{aligned} t' \cos \vartheta - u \vartheta' \cos \vartheta + j \cos^2 \vartheta &= 0, \\ -u' \sin \vartheta - t \vartheta' \sin \vartheta + j \sin^2 \vartheta &= 0, \\ (t \cos \vartheta)' - (u \sin \vartheta)' + j &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Проектуємо сили на горизонталь  $X$ , для чого рівняння (1) домножимо на  $\cos \vartheta$ , рівняння (2) – на  $\sin \vartheta$  і додамо їх:

$$\begin{aligned} u' \cos \vartheta + t \vartheta' \cos \vartheta - j \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0, \\ t' \sin \vartheta - u \vartheta' \sin \vartheta + j \cos \vartheta \sin \vartheta &= 0, \\ (t \sin \vartheta)' + (u \cos \vartheta)' &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Зінтегруємо отримані диференціальні рівняння (9) і (10):

$$t \cos \vartheta - u \sin \vartheta + j s = c_1, \quad (11)$$

$$t \sin \vartheta + u \cos \vartheta = c_2, \quad (12)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування.

Тепер ці рівняння спроектуємо на дотичну, домноживши рівняння (11) на  $\cos \vartheta$ , рівняння (12) – на  $\sin \vartheta$  і додавши їх:

$$t = c_1 \cos \vartheta + c_2 \sin \vartheta - j s \cos \vartheta. \quad (13)$$

Також спроектуємо отримані інтеграли на нормаль, домноживши рівняння (11) на  $-\sin \vartheta$ , рівняння (12) – на  $\cos \vartheta$  і додавши їх:

$$u = -c_1 \sin \vartheta + c_2 \cos \vartheta + j s \sin \vartheta. \quad (14)$$

Для задачі Коші у перетині  $s = s_0$  із системи (13-14) отримаємо:

$$c_1 \cos \vartheta_0 + c_2 \sin \vartheta_0 = t_0 + j s_0 \cos \vartheta_0,$$

$$-c_1 \sin \vartheta_0 + c_2 \cos \vartheta_0 = u_0 - j s_0 \sin \vartheta_0.$$

З цієї системи знайдено сталі інтегрування:

$$c_1 = t_0 \cos \vartheta_0 - u_0 \sin \vartheta_0 + j s_0,$$

$$c_2 = t_0 \sin \vartheta_0 + u_0 \cos \vartheta_0.$$

Підставивши їх у вирази (13-14), отримаємо розв'язок системи (1-2) у вигляді (7-8).

### Перші інтеграли

Розглянемо скінчену ділянку стрижня, зігнутого в одній площині. У його перетині з координатою  $s_0$ , нахиленому до вертикалі під зенітним кутом  $\vartheta_0$ , діє згинальний момент  $q_0$ . Проведемо тут локальну вісь  $z$  по дотичній, вздовж якої діє осьова сила  $t_0$ , та вісь  $x$  по нормалі, вздовж якої діє поперечна сила  $u_0$  (рис. 2). Тоді у довільному перетині з координатою  $s$ , що нахилений до вертикалі під зенітним кутом  $\vartheta$ , діють згинальний момент  $q$ , осьова сила  $t$  і поперечна сила  $u$ , спрямовані так, щоб зрівноважити початкові.

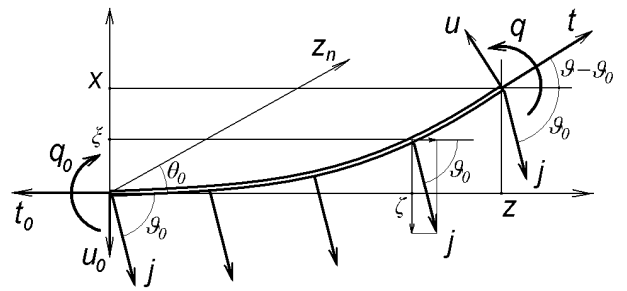


Рисунок 2 – Схема рівноваги скінченної ділянки викривленої колони труб

Для скінченної ділянки стрижня  $[s_0, s]$  рівняння рівноваги проекцій сил на вісь  $z$  та на вісь  $x$  відповідно такі:

$$-t_0 + t \cos(\vartheta - \vartheta_0) - u \sin(\vartheta - \vartheta_0) +$$

$$+ \int_{s_0}^s j ds \cos \vartheta_0 = 0,$$

$$-u_0 + u \cos(\vartheta - \vartheta_0) + t \sin(\vartheta - \vartheta_0) -$$

$$- \int_{s_0}^s j ds \sin \vartheta_0 = 0,$$

звідки відразу отримуємо перші інтеграли системи диференціальних рівнянь (1-2):

$$t_0 = t \cos(\vartheta - \vartheta_0) - u \sin(\vartheta - \vartheta_0) + j(s - s_0) \cos \vartheta_0,$$

$$u_0 = u \cos(\vartheta - \vartheta_0) + t \sin(\vartheta - \vartheta_0) - j(s - s_0) \sin \vartheta_0.$$

Розв'язання цієї системи відносно функцій  $t$  і  $u$  дає розв'язок системи (1-2) у вигляді (7-8).

Ще один перший інтеграл отримаємо з рівняння рівноваги моментів відносно поточного перетину  $s$ :

$$q - q_0 - t_0 x + u_0 z + j \cos \vartheta_0 \int_{s_0}^s (x - \xi) ds +$$

$$+ j \sin \vartheta_0 \int_{s_0}^s (z - \zeta) ds = 0,$$

$$q - q_0 - t_0 x + u_0 z + j \cos \vartheta_0 \left( x(s - s_0) - \int_{s_0}^s \xi ds \right) +$$

$$+ j \sin \vartheta_0 \left( z(s - s_0) - \int_{s_0}^s \zeta ds \right) = 0.$$

У вибраній локальній системі координат  $dz = \cos(\vartheta - \vartheta_0) ds$ ,  $dx = \sin(\vartheta - \vartheta_0) ds$ . Диференціюванням по  $s$  позбудемося інтегралів та отримаємо:

$$q' - t_0 x' + u_0 z' + j \cos \vartheta_0 (x'(s - s_0) + x \cdot 1 - x) +$$

$$+ j \sin \vartheta_0 (z'(s - s_0) + z \cdot 1 - z) = 0,$$

$$q' - t_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) + u_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) +$$

$$+ j(s - s_0) \sin \vartheta = 0.$$

Це ж рівняння можна отримати, підставивши розв'язок (7) у диференціальне рівняння (3).

### Основне диференціальне рівняння

Основне диференціальне рівняння задачі отримується за рівнянням (3) вихідної системи, кінематичним рівнянням (4) та першим інтегралом (7):

$$\vartheta'' - t_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) + u_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + j(s - s_0) \sin \vartheta = 0. \quad (15)$$

Це диференціальне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами є нелінійним за рахунок тригонометричних функцій та не інтегрується у квадратурах. Проте методику розв'язання поставленої задачі можна побудувати на тому, що розв'язок рівняння (15) слід шукати не у вигляді функції зенітного кута  $\vartheta$ , а у вигляді функції його приросту  $(\vartheta - \vartheta_0)$  на ділянці стрижня, якою є обсадна колона між опорами-центраторами.

Знайдемо вигляд рівняння (15) на ділянці стрижня між опорою у перетині  $s_0$  і другою опорою на відстані  $l$  у напрямку зростання  $s$  (на рис. 2 не показана), через які проведено нову локальну вісь  $z_n$  (де  $n$  – номер розглянутої ділянки). На початку ділянки дотична до зігнутого стрижня повернута відносно нової осі на кут  $\theta_0 < 0$ , тому зенітний кут нахилу нової осі  $z_n$  до вертикалі  $\vartheta_n = \vartheta_0 - \theta_0$ . Цей же кут  $\vartheta_n$  – це кут нахилу ще недеформованого прямолінійного стрижня на  $n$ -ій ділянці між двома опорами.

Деформації згину стрижня відбуваються під дією власної ваги та дії згинальних моментів з боку двох суміжних ділянок, які теж деформуються. Після цього кожний перетин стрижня отримує поворот на кут  $\theta$  відносно локальної осі  $z_n$ , а дотична в ньому займає свій кут нахилу  $\vartheta$  відносно вертикалі. Отже:  $\vartheta = \vartheta_n + \theta$ ,  $\vartheta_0 = \vartheta_n + \theta_0$ ,  $\vartheta - \vartheta_0 = \theta - \theta_0$ . Підставивши ці кути у (15), отримаємо основне диференціальне рівняння деформацій гнучкого стрижня під дією власної ваги на ділянці між двома довільно розміщеними опорами:

$$\theta'' - t_0 \sin(\theta - \theta_0) + u_0 \cos(\theta - \theta_0) + j(s - s_0) \sin(\vartheta_n + \theta) = 0, \quad (16)$$

де  $\theta$  – кут між дотичною у перетині стрижня та віссю, що з'єднує дві шарнірні опори, на які він опирається.

Оцінимо величини тригонометричних функцій у рівнянні (16), яких вони набувають у реальних свердловинах. На ділянці між двома центраторами на відстані не більше 20 м колона

труб завдяки своїй жорсткості може вигинатись лише за достатньо пологою кривою, яку у першому наближенні можна вважати дугою кола. Тому на викривленій ділянці кут нахилу дотичної до осі опор змінюється у межах  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ , де  $\theta_1 > 0$  – кут нахилу дотичної на другій опорі ( $\theta_1 \approx |\theta_0|$ ), а приріст цього кута змінюється у межах  $0 \leq (\theta - \theta_0) \leq 2|\theta_0|$ .

У практиці спорудження найбільш викривлених ділянок свердловин за вимогою міцності при згині та попередження зминання труб не допускаються радіуси кривизни, менші 160 м, а за вимогою обмеження прогинів труб та забезпечення необхідного зазору між ними і стінками свердловини не допускаються відстані між центраторами, більші за 20 м. В таких умовах кут  $\theta$  змінюється у межах  $\pm 0,063$  радіан ( $\pm 3^\circ, 6$ ). Тому можна прийняти значення функцій  $\cos \theta = 1$  з похибкою розрахунку  $\pm 0,20\%$  та  $\sin \theta = \theta$  з похибкою  $\pm 0,065\%$ , а функції від приросту кута  $\cos(\theta - \theta_0) = 1$  з похибкою, меншою за 0,78%, та  $\sin(\theta - \theta_0) = (\theta - \theta_0)$  з похибкою, меншою за 0,26%.

Отже, враховуючи вимоги технології встановлення обсадної колони на невертикальних і викривлених ділянках свердловини, можна з достатньою точністю лінеаризувати основне диференціальне рівняння деформацій стрижня між двома опорами під дією власної ваги:

$$\theta'' - t_0(\theta - \theta_0) + u_0 + j(s - s_0)(\sin \vartheta_n + \theta \cos \vartheta_n) = 0,$$

де  $\vartheta_n$  – зенітний кут нахилу осі опор.

### Застосування функцій Ейрі та Скорера

Розглянемо задачу Коші, у якій початкові параметри задано на другій опорі; тоді  $s_0 = l$ , а параметри позначено індексом  $l$ :

$$\begin{aligned} \theta'' - t_l(\theta - \theta_l) + u_l + j(s - l)(\sin \vartheta_n + \theta \cos \vartheta_n) &= 0, \\ \theta'' - (j \cos \vartheta_n (l - s) + t_l) \theta &= \\ = j \sin \vartheta_n (l - s) - (u_l + t_l \theta_l). \end{aligned}$$

Змінимо напрямок відліку координати:  $s_* = l - s$ , уведемо позначення:  $a_n^3 = j \cos \vartheta_n$ ,  $b_n^3 = j \sin \vartheta_n$ , а останнє рівняння запишемо так:

$$d^2 \theta / ds_*^2 - a_n^3 (s_* + t_l / a_n^3) \theta = b_n^3 s_* - (u_l + t_l \theta_l).$$

Введемо нову змінну

$$\zeta = a_n (s_* + t_l / a_n^3), \quad (17)$$

тоді  $s_* = (\zeta - t_l/a_n^2)/a_n$ ,  $d\zeta/ds_* = a_n$ , а рівняння набуде вигляду:

$$a_n^2 \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - a_n^2 a_n \left( s_* + \frac{t_l}{a_n^3} \right) \theta =$$

$$= \frac{b_n^3}{a_n} \left( \zeta - \frac{t_l}{a_n^2} \right) - (u_l + t_l \theta_l),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - \zeta \theta = \frac{b_n^3}{a_n^3} \zeta - \frac{b_n^3}{a_n^3} \frac{t_l}{a_n^2} - \frac{u_l + t_l \theta_l}{a_n^2}.$$

Оскільки  $\text{tg } \vartheta_n = b_n^3/a_n^3$ , увівши константу

$$v_l = \frac{u_l + t_l (\theta_l + \text{tg } \vartheta_n)}{a_n^2}, \quad (18)$$

отримаємо основне диференціальне рівняння деформацій гнучкого стрижня між двома довільно розміщеними опорами під дією власної ваги у вигляді

$$\ddot{\theta} - \zeta \theta = \zeta \text{tg } \vartheta_n - v_l, \quad (19)$$

де  $\dot{\theta} = d\theta/d\zeta$  – похідна за новою змінною.

Це є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами. Однорідне рівняння  $\ddot{\theta} = \zeta \theta$  називають рівнянням Ейрі; його розв'язком є лінійна комбінація функцій Ейрі [11]:

$$\theta_0(\zeta) = C_1 \text{Ai}(\zeta) + C_2 \text{Bi}(\zeta), \quad (20)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування.

Функції Ейрі [11] можна представити не-власними інтегралами за параметром:

$$\text{Ai}(\zeta) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \cos(\zeta \phi + \phi^3/3) d\phi, \quad (21)$$

$$\text{Bi}(\zeta) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (\sin(\zeta \phi + \phi^3/3) + \exp(\zeta \phi - \phi^3/3)) d\phi.$$

Зі збільшенням додатних значень  $\zeta$  функції Ейрі монотонно змінюються за експоненціальним законом:  $\text{Ai}(\zeta)$  спадає,  $\text{Bi}(\zeta)$  зростає. У задачі опускання обсадних труб у викривлену свердловину згідно з (17) цьому відповідає додатна сила розтягу колони, яка зростає знизу вгору.

Для від'ємних значень  $\zeta$  обидві функції Ейрі мають періодичний коливальний характер. При просуванні по горизонтальній чи близьких до горизонтальної ділянках свердловини колона труб зазнає поздовжнього стиску внаслідок сил тертя, що створює у її тілі від'ємну осьову силу  $t$ . Відповідний характер будуть мати і деформації колони труб, що узгоджується з тригонометричним розв'язком задачі Ейлера про поздовжній згин стрижня.

Один із частинних розв'язків неоднорідного рівняння (19) очевидний:

$$\theta_{**} = -\text{tg } \vartheta_n. \quad (22)$$

Другий частинний розв'язок повинен забезпечити константу  $-v_l$  у правій частині рівняння (19). Спочатку розглянемо випадок, коли на ділянці стрижня діє додатна сила розтягу  $t_l > 0$ . Тоді  $v_l > 0$  згідно з (18). За методом Лагранжа сталі інтегрування:

$$C_1 = \pi v_l \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma + c_1,$$

$$C_2 = -\pi v_l \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma + c_2.$$

Їх підстановка у (20) дає загальний розв'язок рівняння (19) у вигляді

$$\theta(\zeta) = c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2 \text{Bi}(\zeta) - \text{tg } \vartheta_n +$$

$$+ \pi v_l \left( \text{Ai}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma - \text{Bi}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma \right).$$

Останній доданок є другим частинним розв'язком; його можна виразити функцією Скорера [11]:

$$\text{Gi}(\zeta) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \sin(\zeta \phi + \phi^3/3) d\phi = \frac{1}{3} \text{Bi}(\zeta) +$$

$$+ \left( \text{Ai}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma - \text{Bi}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma \right). \quad (23)$$

Це дає такий вигляд загального розв'язку

$$\theta(\zeta) = c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2^* \text{Bi}(\zeta) + \pi v_l \text{Gi}(\zeta) - \text{tg } \vartheta_n. \quad (24)$$

де  $c_2^* = c_2 - \pi v_l/3$ .

Тепер розглянемо випадок, коли на ділянці стрижня діє від'ємна сила стиску  $t_l < 0$ . Тоді  $v_l < 0$  згідно з (18), права частина (19) містить додатну константу  $|v_l|$ , а сталі інтегрування і загальний розв'язок мають вигляд:

$$C_1 = -\pi |v_l| \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma + c_1,$$

$$C_2 = \pi |v_l| \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma + c_2,$$

$$\theta(\zeta) = c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2 \text{Bi}(\zeta) - \text{tg } \vartheta_n +$$

$$+ \pi |v_l| \left( \text{Bi}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma - \text{Ai}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma \right).$$

Тут останній доданок можна виразити через іншу функцію Скорера [11]:

$$\begin{aligned} \text{Hi}(\zeta) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \exp(\zeta \phi - \phi^3/3) d\phi = \frac{2}{3} \text{Bi}(\zeta) + \\ + \left( \text{Bi}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Ai}(\sigma) d\sigma - \text{Ai}(\zeta) \int_0^{\zeta} \text{Bi}(\sigma) d\sigma \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Це дає такий вигляд загального розв'язку:

$$\theta(\zeta) = c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2^* \text{Bi}(\zeta) + \pi |v_l| \text{Hi}(\zeta) - \text{tg} \vartheta_n. \quad (26)$$

де  $c_2^* = c_2 - 2\pi |v_l|/3$ .

Основне рівняння (15) та отримане з нього рівняння (19) є першим інтегралом вихідної системи (1-4), тому константа  $v_l$  (18) є сталою інтегрування і може визначатись з граничних умов задачі.

Як бачимо з (21), (23) і (25), зв'язок між функціями Ейрі і Скорера:  $\text{Bi}(\zeta) = \text{Gi}(\zeta) + \text{Hi}(\zeta)$  [11], вказує на можливість шукати загальний розв'язок основного диференціального рівняння (19) у вигляді лінійної комбінації трьох лінійно незалежних функцій:

$$\theta(\zeta) = c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2 \text{Gi}(\zeta) + c_3 \text{Hi}(\zeta) - \text{tg} \vartheta_n, \quad (27)$$

де  $c_1, c_2$  і  $c_3$  – сталі інтегрування, які підлягають визначенню за граничними умовами.

Звідси поперечні зміщення  $x$  стрижня між опорами, внутрішні згинальні моменти  $q$  і поперечні сили  $u$  відповідно такі:

$$\begin{aligned} x &= \int \theta ds = -a_n^{-1} \int \theta d\zeta = -a_n^{-1} \left( c_1 \int \text{Ai} d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \int \text{Gi} d\zeta + c_3 \int \text{Hi} d\zeta - \zeta \text{tg} \vartheta_n + c_4 \right), \\ q &= \theta' = -a_n \dot{\theta} = \\ &= -a_n \left( c_1 \dot{\text{Ai}}(\zeta) + c_2 \dot{\text{Gi}}(\zeta) + c_3 \dot{\text{Hi}}(\zeta) \right), \\ u &= -q' = a_n \dot{q} = \\ &= -a_n^2 \left( c_1 \ddot{\text{Ai}}(\zeta) + c_2 \ddot{\text{Gi}}(\zeta) + c_3 \ddot{\text{Hi}}(\zeta) \right), \end{aligned}$$

де  $ds = -a_n^{-1} d\zeta$  згідно з (17).

Функція  $\text{Ai}$  є розв'язком однорідного рівняння Ейрі, функції  $\text{Gi}$  та  $\text{Hi}$  – розв'язками відповідних неоднорідних рівнянь Ейрі [11], тому

$$\ddot{\text{Ai}}(\zeta) = \zeta \text{Ai}(\zeta),$$

$$\ddot{\text{Gi}}(\zeta) = \zeta \text{Gi}(\zeta) - \pi^{-1}, \quad \ddot{\text{Hi}}(\zeta) = \zeta \text{Hi}(\zeta) + \pi^{-1},$$

$$\begin{aligned} u &= -a_n^2 \left( \zeta (c_1 \text{Ai}(\zeta) + c_2 \text{Gi}(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + c_3 \text{Hi}(\zeta)) - (c_2 - c_3) \pi^{-1} \right). \end{aligned}$$

Виходячи з розв'язків у вигляді (24), (26) і (27), отримаємо:  $u = -a_n^2 \left( (\theta + \text{tg} \vartheta_n) \zeta - v_l \right)$ .

Координати опор при  $s=0$  та  $s=l$  відповідно  $\zeta_0 = a_n l + t_l/a_n^2$  та  $\zeta_l = t_l/a_n^2$ . Дві граничні умови – це відсутність прогинів на опорах:  $x(\zeta_0) = 0$ ,  $x(\zeta_l) = 0$ . Ще дві граничні умови –

це рівняння сумісності кутів поворотів та рівноваги згинальних моментів в опорних перерізах з двох боків суміжних ділянок стрижня. На вільному кінці колони труб  $q(\zeta_l) = 0$ .

### Застосування рядів

Однорідному рівнянню Ейрі задовільняють два лінійно незалежні ряди [11]:

$$\theta_A = 1 + \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{4}{6!} \zeta^6 + \frac{4 \cdot 7}{9!} \zeta^9 + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{12!} \zeta^{12} + \dots, \quad (28)$$

$$\theta_B = \zeta + \frac{2}{4!} \zeta^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} \zeta^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} \zeta^{10} + \dots \quad (29)$$

Можна показати, що неоднорідному рівнянню  $\ddot{\theta} - \zeta \theta = 1$  задовільняє ряд:

$$\theta_* = \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{3}{5!} \zeta^5 + \frac{3 \cdot 6}{8!} \zeta^8 + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{11!} \zeta^{11} + \dots \quad (30)$$

Загальним розв'язком основного диференціального рівняння (19) є лінійна комбінація трьох лінійно незалежних рядів (28-30) і частинний розв'язок (22):

$$\theta = c_1 \theta_A + c_2 \theta_B + c_3 \theta_* - \text{tg} \vartheta_n.$$

Звідси прогини  $x$  стрижня, внутрішні згинальні моменти  $q$  і поперечні сили  $u$  відповідно такі:

$$\begin{aligned} x &= -a_n^{-1} \left( c_1 \int \theta_A d\zeta + c_2 \int \theta_B d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + c_3 \int \theta_* d\zeta - \zeta \text{tg} \vartheta_n + c_4 \right), \\ q &= -a_n \left( c_1 \dot{\theta}_A + c_2 \dot{\theta}_B + c_3 \dot{\theta}_* \right), \\ u &= -a_n^2 \left( c_1 \ddot{\theta}_A + c_2 \ddot{\theta}_B + c_3 \ddot{\theta}_* \right) = \\ &= -a_n^2 \left( (\theta + \text{tg} \vartheta_n) \zeta - v_l \right). \end{aligned}$$

Сталі інтегрування  $c_1, c_2, c_3 = -v_l$  і  $c_4$  слід визначати за граничними умовами.

### Практичне застосування результатів

Отримані вирази дають змогу забезпечити технологічні умови процесу встановлення колони обсадних труб у свердловині. Зокрема, за рівнянням поперечних зміщень можна визначити максимальний прогин  $x_{\max}$  посередині ділянки труби і встановити допустиму відстань  $l_{\max}$  між центраторами для його зменшення. За значеннями згинальних моментів  $q$  посередині ділянки і в опорних перетинах можна розрахувати максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  згину труби:

$$\sigma_{\max} = q_{\max} E d / 2.$$



## Висновки

Великі деформації довгого пружного стрижня, викривленого в одній площині під дією власної ваги, описуються неоднорідною системою чотирьох диференціальних рівнянь. Врахування вимог технології встановлення колони обсадних труб на центрувальних опорах у невертикальних і викривлених свердловинах дозволяє лінеаризувати перший інтеграл системи та звести його до неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Його розв'язком є комбінація функцій Ейрі та Скорера або трьох лінійно незалежних поліноміальних рядів у сумі з частинним розв'язком.

Розвиток розглянутої задачі полягає у моделюванні обсадної колони у реальній свердловині за допомогою системи рівнянь сумісності деформацій та рівноваги моментів в опорних перерізах кожного центратора по всій довжині колони, що можна здійснити за допомогою комп'ютерного програмування.

Одержані рівняння деформаційних і силових параметрів дають змогу розрахувати напружено-деформований стан труб обсадної колони під час технологічного процесу кріплення свердловини складного профілю, що дозволяє підвищити надійність і довговічність її експлуатації.

## Література

- McDermott J.R., Viktorin R.A., Schamp J.H. Extended reach drilling (ERD) technology enables economical development of remote offshore fields in Russia. *SPE/IADC Drilling Conference*. Amsterdam : Netherlands: Society of Petroleum Engineers, 2005. P. 183-188.
- Gupta V. P., Yeap A.H., Mathis R. S. Expanding the extended reach envelope at Chayvo field, Sakhalin Island. *IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition*. Fort Worth, Texas, US : Society of Petroleum Engineers, 2014. P. 1207-1229.
- Коцкулич Я.С., Сенюшкович М.В., Марцинків О.Б., Витвицький І.І. Центрування обсадних колон у похило-скерованих свердловинах. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2015. № 3. С. 23-30.
- Vytvytskyi I.I., Seniushkovich M.V., Shatskyi I.P. Calculation of distance between elastic-rigid centralizers of the casing. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2017. No 5. P. 29-35.
- Николаи Е.Л. К задаче об упругой линии двоякой кривизны. *Труды по механике*. М. : Гостехиздат, 1955. С. 45-277.
- Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М. : Гостехиздат, 1948. 172 с.
- Frisch-Fay, R. Flexible Bars. London : Butterworths, 1962. 220 p.
- Gulyayev V., Shlyun N. Influence of friction on buckling of a drill string in the circular channel of a borehole. *Petroleum Science*. 2016. No 13. P. 698-711.
- Палійчук І.І. Метод визначення внутрішніх силових чинників у обсадній колоні глибокої, просторово орієнтованої свердловини. *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. 2017. № 2 (63). С. 44-50.
- Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск : Вышэйшая школа, 1974. 768 с.
- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган (пер. с англ.). М. : Наука, 1979. 832 с.

## References

- McDermott J.R., Viktorin R.A., Schamp J.H. Extended reach drilling (ERD) technology enables economical development of remote offshore fields in Russia. *SPE/IADC Drilling Conference*. Amsterdam : Netherlands: Society of Petroleum Engineers, 2005. P. 183-188.
- Gupta V. P., Yeap A.H., Mathis R. S. Expanding the extended reach envelope at Chayvo field, Sakhalin Island. *IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition*. Fort Worth, Texas, US : Society of Petroleum Engineers, 2014. P. 1207-1229.
- Kotskulych Ya.S., Seniushkovich M.V., Martsynkiv O.B., Vytvytskyi I.I. Tsentrivannia obsadnykh kolon u pokhilo-skerovanykh sverdlovynakh. *Naukovyi visnyk natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2015. No 3. P. 23-30.
- Vytvytskyi I.I., Seniushkovich M.V., Shatskyi I.P. Calculation of distance between elastic-rigid centralizers of the casing. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2017. No 5. P. 29-35.
- Nikolai Ye.L. K zadache ob uprugoi linii dvoyakoi krivizny. *Trudy po mekhanike*. М. : Gostekhizdat, 1955. P. 45-277.
- Popov Ye.P. Nelineinye zadachi statiki tonkikh stержней. М. : Gostekhizdat, 1948. 172 p.
- Frisch-Fay, R. Flexible Bars. London : Butterworths, 1962. 220 p.

8. Gulyayev V., Shlyun N. Influence of friction on buckling of a drill string in the circular channel of a borehole. *Petroleum Science*. 2016. No 13. P. 698-711.

9. Paliichuk I.I. Metod vyznachennia vnutrishnikh sylovykh chynnykiv u obsadnii koloni hlybokoi, prostorovo oriientovanoi sverdlovyny. *Rozvidka ta rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch*. 2017. No 2 (63). P. 44-50.

10. Matveiev N.M. Metody integrirovaniia obyknovennykh differentsialnykh uravnenii. Minsk : Vysheishaia shkola, 1974. 768 z.

11. Abramowitz M., Stegun I.A. Spravochnik po spetsyalnym funktsyiam / pod red. M. Abramovitz i I.A. Stegun (per. s angl.). M. : Nauka, 1979. 832 p.