

## РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОМЕТРІЇ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ШАРУВАТИХ РОЗРІЗІВ

Ю.Ф. Ткаченко, В.М. Сенічак

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42098,  
e-mail: p n g g @ n u n g . e d u . u a

Запропоновані чисельні алгоритми розв'язку прямих і обернених задач електрометрії в математичному пакеті MathCAD. Розглянуто приклади застосування MathCAD-алгоритмів для розв'язку прямої задачі вертикальних електричних зондувань (ВЕЗ), прямої і оберненої задачі становлення електромагнітного поля (ЗС). Наведено MathCAD-реалізацію наближеної експрес-інтерпретації польових кривих ЗС шляхом апроксимації геоелектричного розрізу еквівалентною провідною площиною (однорідною плівкою Прайса-Шейнмана). Запропоновані алгоритми для методу ЗС нескладно модифікувати для довільної кількості пластів горизонтально-шаруватих розрізів.

Ключові слова: електрометрія, ВЕЗ і ЗС, прямі і обернені задачі, MathCAD

Предложены численные алгоритмы решения прямых и обратных задач электротометрии в математическом пакете MathCAD. Рассмотрены примеры применения MathCAD-алгоритмов для решения прямой задачи вертикальных электрических зондирований (ВЭЗ), прямой и обратной задачи становления электромагнитного поля (ЗС). Приведена MathCAD-реализацию приближенной интерпретации полевых кривых ЗС путем апроксимации геоэлектрического разреза эквивалентной проводящей плоскостью (однородной пленкой Прайса-Шейнмана). Предложенные алгоритмы для метода ЗС несложно модифицировать для произвольного числа пластов горизонтально-слоистых разрезов.

Ключевые слова: электротометрия, ВЭЗ и ЗС, прямая и обратная задачи, MathCAD

Numerical algorithms of solving primal and invers electrometry problems in Math CAD mathematical package have been suggested in this article. Examples of Math CAD-algorithms for solving primal problem of vertical electric sounding (VES), primal and inverse problem of electromagnetic field formation (EFF) are considered. Math CAD realization of field curves approximate interpretation of primal and inverse problem of electromagnetic field formation by geoelectric cross section approximation using an equivalent conduction plan (Price-Sheinman homogeneous film). The offered algorithms for EFF method are simple for modifying for any number of layers in horizontally-bedded sections.

Keywords: electrometry, VES and FFF, solving primal and inverse electrometry problems, MathCAD

Розв'язання прямих і обернених задач електрометрії є невід'ємною складовою інтерпретації геоелектричних даних. З цією метою розроблено багато спеціалізованих програмних комплексів, написаних на мовах програмування високого рівня. В той же час за останні десятиліття досягнутий значний прогрес в розробці та удосконаленні сучасних математичних пакетів: MathCAD, MatLAB, Mathematica, STATISTICA тощо. Серед низки математичних пакетів за простотою, функціональними можливостями та зручністю виконання обчислень вигідно вирізняється математичний пакет MathCAD, що в скороченому вигляді означає математичне моделювання із застосуванням комп'ютерів. Основною рисою пакету MathCAD є візуалізація в MathCAD-документі математичного алгоритму, результатів обчислень та графічних об'єктів. Розв'язки більшості прямих і обернених задач електрометрії не виражаються в елементарних функціях і вимагають застосування чисельних методів. Водночас цьому питанню в науковій літературі з електрометрії приділяється недостатньо уваги. В той же час отримання чисельних розв'язків задач електрометрії не є тривіальною проблемою. В зв'язку з цим автори даної статті поставили за мету опублікувати відкриті для геофізиків чисельні алгоритми розв'язку деяких прямих і обернених задач електрометрії в математичному пакеті MathCAD.

Функціональні можливості останніх версій пакету MathCAD дають змогу розв'язувати інтерпретаційні задачі електрометрії різного рівня складності. Розглянемо їх на прикладах прямої задачі вертикальних електричних зондувань (ВЕЗ) та прямої і оберненої задачі становлення електромагнітного поля (ЗС).

### 1. Пряма задача ВЕЗ для горизонтально-шаруватого середовища

Розрахункові формули для розв'язування прямої задачі ВЕЗ у горизонтально-шаруватому середовищі (рис.1) мають вигляд [1]  
двошарове середовище

$$\rho = \rho_1 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{12}^n r^3}{\left[ r^2 + (2nh_1)^2 \right]^{3/2}} \right\}. \quad (1)$$

тришарове середовище

$$\rho_{II} = \rho_1 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n r^3}{\left[ r^2 + (2nh_1)^2 \right]^{3/2}} \right\}, \quad (2)$$

де  $k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ ;  $k_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 + \rho_3}$ ;

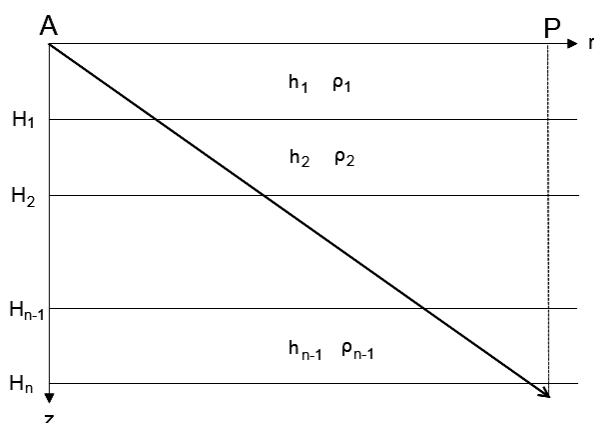


Рисунок 1 – Геоелектрична модель горизонтально-шаруватого середовища

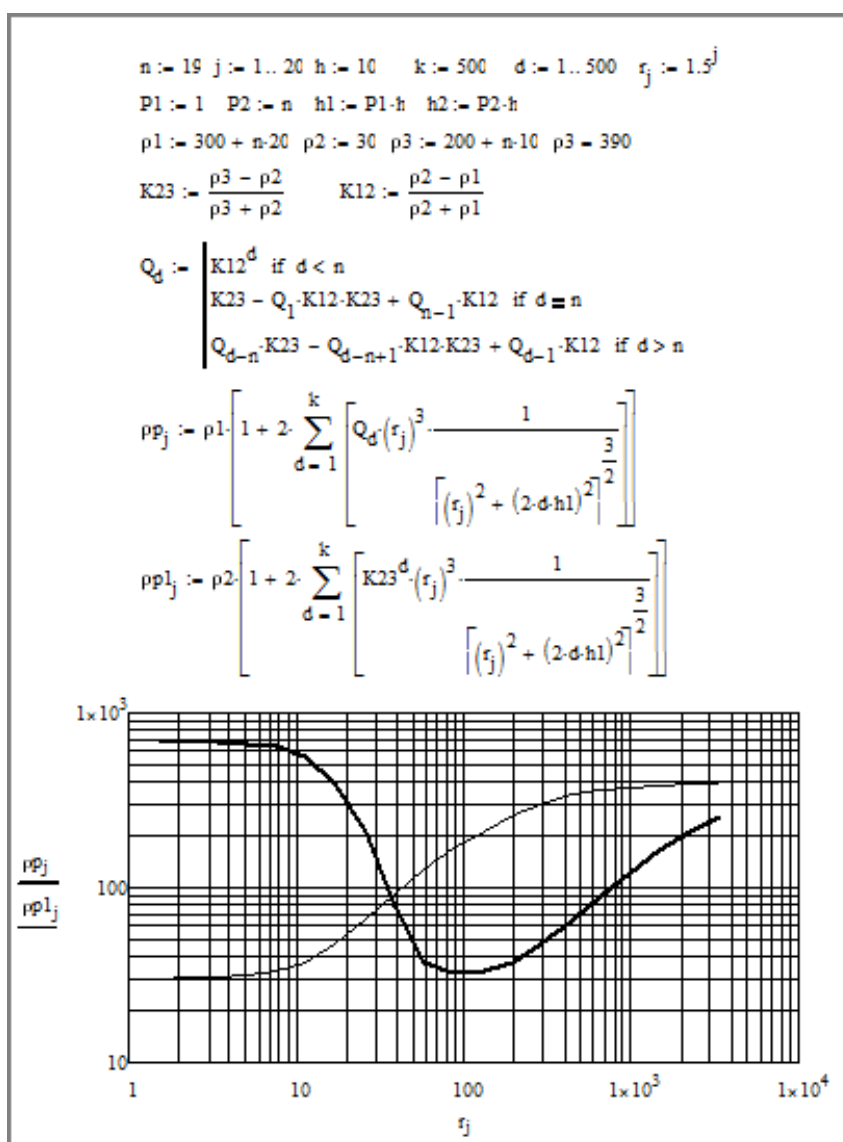


Рисунок 2 – MathCAD-документ розв’язання прямої задачі вертикальних електричних зондувань

$q_n = f(k_{12}, k_{23})$ ;  $\rho_n$  - позірний опір.  
 Формула (2) дійсна для довільного  $n$  - шаруватого середовища з коефіцієнтом емісії  $q_n = f(k_{12}, k_{23}, k_{34}, \dots)$ .

На рис. 2 зображено MathCAD - документ, у якому реалізований алгоритм розв’язання прямої задачі ВЕЗ для дво- і тришарового середовища.

$$\begin{aligned}
 L &:= 100 & r &:= 100 & k &:= \frac{4 \cdot L^2 \cdot r}{\pi} & \mu &:= 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \\
 i &:= 1..200 & H_i &:= 20 \cdot i & h_i &:= 20 \cdot i - 10 \\
 \rho_1 &:= 100 & \rho_2 &:= 30 & \rho_3 &:= 200 & \rho_4 &:= 1000 & h_1 &:= 500
 \end{aligned}$$

$$S_i := \begin{cases} \left(\frac{20 \cdot i}{\rho_1}\right) & \text{if } i < 26 \\ \left[\frac{20 \cdot (i - 25)}{\rho_2} + S_{25}\right] & \text{if } 25 < i < 76 \\ \left[\frac{20 \cdot (i - 75)}{\rho_3} + S_{75}\right] & \text{if } 75 < i < 126 \\ \left[\frac{20 \cdot (i - 125)}{\rho_4} + S_{125}\right] & \text{if } i > 125 \end{cases}$$

$$\Sigma_i := \begin{cases} \left[\left(\frac{20}{\rho_1}\right) \cdot \sum_{j=1}^i h_j\right] & \text{if } i < 26 \\ \left[\left(\frac{20}{\rho_2}\right) \cdot \left(\sum_{j=26}^i h_j\right) + \Sigma_{25}\right] & \text{if } 25 < i < 76 \\ \left[\left(\frac{20}{\rho_3}\right) \cdot \left(\sum_{j=76}^i h_j\right) + \Sigma_{75}\right] & \text{if } 75 < i < 126 \\ \left[\left(\frac{20}{\rho_4}\right) \cdot \left(\sum_{j=126}^i h_j\right) + \Sigma_{125}\right] & \text{if } i > 125 \end{cases}$$

$$h\tau_i := \frac{\Sigma_i}{S_i} \quad t_i := \mu \cdot S_i \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot H_i - h\tau_i\right) \quad E_i := \frac{k \cdot H_i}{S_i \cdot \left[r^2 + \left(\frac{64}{9}\right) \cdot (H_i)^2\right]^{\frac{5}{2}}} \quad \tau_i := \sqrt{2 \cdot \pi \cdot t_i}$$

Рисунок 3 – MathCAD-документ розв’язання прямої задачі ЗСБ

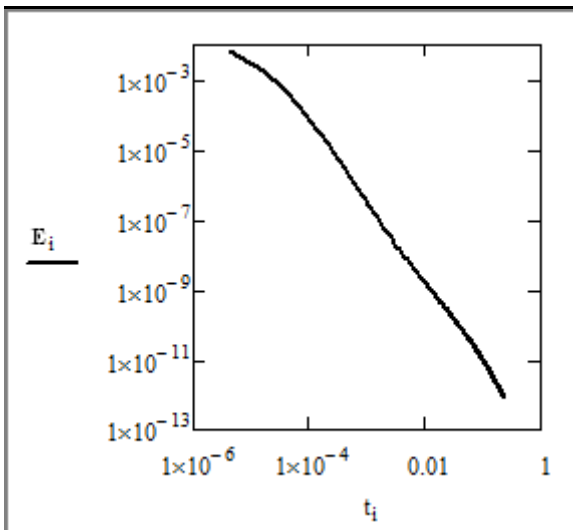


Рисунок 4 – Графік становлення поля

$$W := \frac{\mu^{\frac{5}{3}} \cdot (L^2 \cdot r)^{\frac{2}{3}}}{\pi \cdot (40)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\rho\tau_i := (t_i)^{\frac{-5}{3}} \cdot W \cdot (|E_i|)^{\frac{-2}{3}} \quad \rho\tau_{i_1} := \frac{\rho\tau_i}{\rho_1}$$

Рисунок 5 – MathCAD-документ алгоритму розв’язання оберненої задачі ЗСБ

2. Прямі і обернені задачі ЗСБ для горизонтально-шаруватого середовища

Розв’язання прямих і обернених задач методом становлення електромагнітного поля в ближній зоні в пакеті MathCAD виконаний для вертикального магнітного диполя шляхом ви-

користання співвідношень, що описані в роботі [2]. На рисунках 3 і 4 зображено результати розв’язання прямої задачі ЗСБ, на рис. 5-10 – оберненої задачі для розрахованої кривої становлення поля  $E(t)$ .

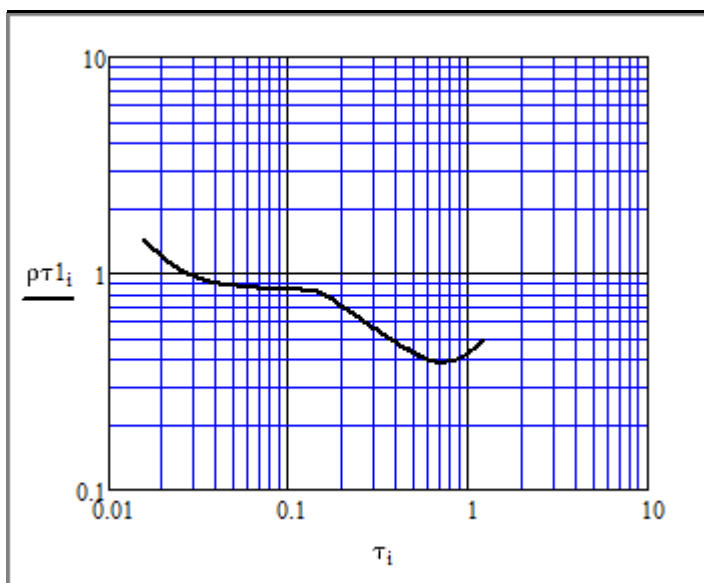


Рисунок 6 – Графік позірного питомого опору

$$\begin{aligned}
 & i := 2..199 \quad E1_i := \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{E_i - E_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{E_{i+1} - E_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \\
 & x := 0.01 \quad k1 := \frac{3 \cdot L^2}{\pi \cdot r^3} \quad p := \mu \cdot r \cdot k1 \\
 & \text{Given} \\
 & 0 = x^{-2} \cdot (1 + 4 \cdot x^2)^{\frac{5}{2}} - 20 \cdot (1 + 4 \cdot x^2)^{\frac{3}{2}} - d \\
 & \Psi(d) := \text{Find}(x) \\
 & d_i := p \cdot \frac{E1_i}{(E_i)^2} \quad m_i := \Psi(d_i) \\
 & Fm_i := \frac{(m_i)}{[1 + 4 \cdot (m_i)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad S\tau_i := \frac{k1 \cdot Fm_i}{E_i} \quad H\tau_i := 3 \cdot r \cdot \frac{(m_i)}{4} \\
 & i := 3..198 \\
 & pp_i := \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{H\tau_i - H\tau_{i-1}}{S\tau_i - S\tau_{i-1}} + \frac{H\tau_{i+1} - H\tau_i}{S\tau_{i+1} - S\tau_i} \right) \quad \rho_i := \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{H_i - H_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} + \frac{H_{i+1} - H_i}{S_{i+1} - S_i} \right) \\
 & vx_i := i \quad pp\_med := \text{medsmooth}(pp, 5)
 \end{aligned}$$

Рисунок 7 – MathCAD-документ експрес-інтерпретації кривої ЗС

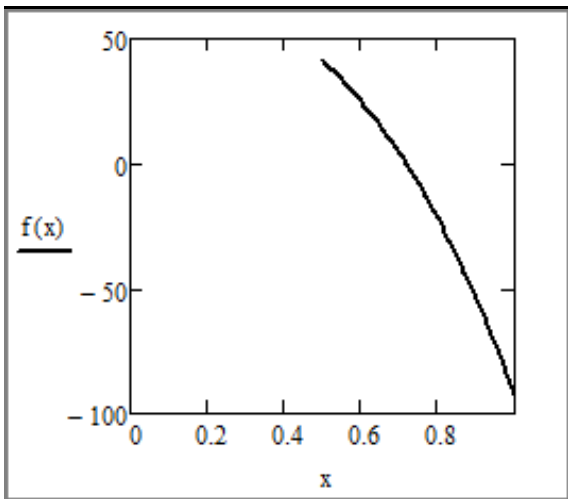


Рисунок 8 – Графік функції  $f(m)$

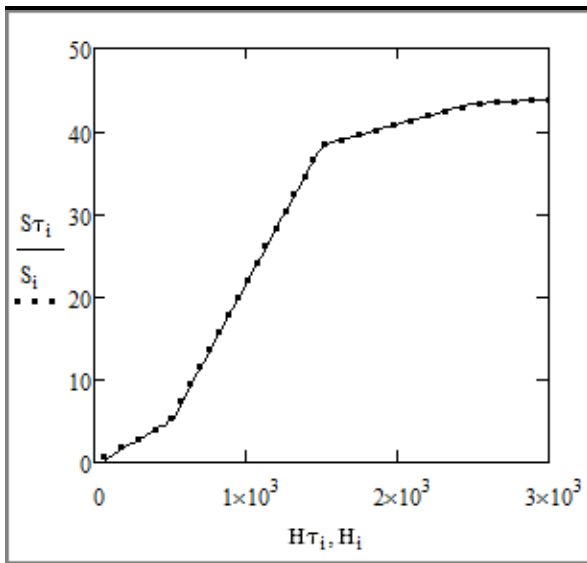


Рисунок 9 – Графіки поздовжньої  $S_i$  і позірної поздовжньої провідності  $S_{\tau}$

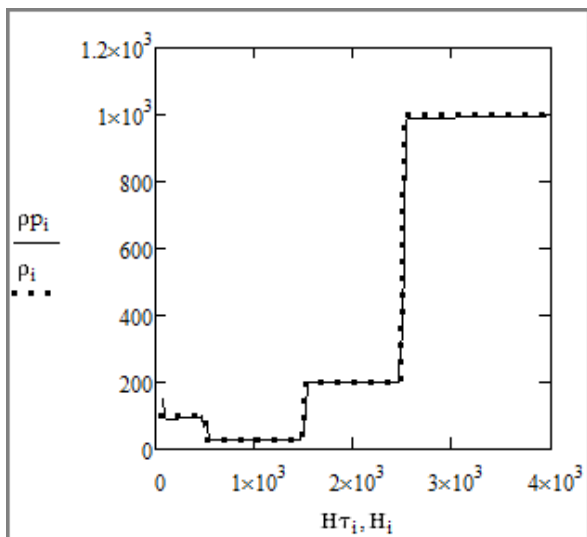


Рисунок 10 – Графіки питомого опору  $\rho_i$  та його оцінка  $\rho\rho$  за позірною провідністю  $S_{\tau}$

В MathCAD – документах прийняті позначення:  $r$  - рознос;  $L^2$  – ефективна площа диполя;  $H_{\tau}$  - ефективна глибина залягання еквівалентної

провідної площини;  $S_{\tau}$  - позірна поздовжня провідність;  $\rho_i$  - питомий опір;  $\rho\rho$  – оцінка питомого опору за результатами кількісної інтерпретації.

Розглянемо MathCAD-реалізацію наближеної експрес-інтерпретації польових кривих ЗС на основі параметру  $S_{\tau}$  - позірної поздовжньої провідності розрізу [2]. Параметр  $S_{\tau}$  отримують шляхом апроксимації геоелектричного розрізу еквівалентною провідною площиною (однорідною плівкою Прайса-Шейнмана). Для інтерпретації використана розрахована крива ЗС (рис. 4).

В алгоритмі на рис. 7 для обчислення параметру  $m$  провідної площини використаний блок *Given-Find*, який реалізує чисельне рішення рівняння, записаного після функції *Given*. Початкове наближення для параметру  $m$  ( $x=0.01$ ) обране після аналізу графіку функції  $f(m)$  (рис.8).

Кількісна інтерпретація може виконуватися як безпосередньо за величиною позірної поздовжньої провідності  $S_{\tau}$ , так і шляхом обчислення похідної  $H_{\tau}$  по  $S_{\tau}$ , якою оцінюється питомий опір порід.

Остаточні результати інтерпретації наведені на рис. 9 і 10.

Як це видно з наведених на рис. 9 і 10 результатів кількісної інтерпретації, вони практично співпадають із заданими параметрами горизонтально-шаруватого розрізу.

**Висновки:**

1. В статті вперше запропоновані чисельні алгоритми розв'язку прямих і обернених задач електротрії (методів ВЕЗ і ЗС) в математичному пакеті MathCAD. 2. Наведені алгоритми для методу ЗС нескладно модифікувати для довільної кількості пластів горизонтально-шаруватого розрізу. 3. Отримані оцінки питомих опорів і глибин залягання окремих горизонтів за результатами кількісної інтерпретації добре узгоджуються із заданими параметрами горизонтально-шаруватого розрізу, що підтверджує ефективність запропонованої методики.

*Завдання наступних досліджень.* Актуальною залишається проблема дослідження роздільної здатності методу ЗС при інтерпретації польових кривих на основі параметру позірної поздовжньої провідності. На цьому шляху необхідно дослідити вплив на результати інтерпретації випадкових і систематичних чинників, яким супроводжуються польові вимірювання в методі ЗС.

**Література**

1 Заборовский А.И. Электроразведка / А.И.Заборовский. – М: Гостоптехиздат, 1963. – 415 с.  
 2 Сидоров В.А. Импульсная индуктивная электроразведка / В.А.Сидоров. – М: Недрa, 1985. – 192 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 01.11.10

Рекомендована до друку професором В.М. Мойсишиним