

## ЛОГІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ПЕРСПЕКТИВА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗВИТКУ ФІТОЦЕНОЗІВ ПРИКАРПАТТЯ

Ю.М.Лабіі

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника,  
76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57, тел. (0342) 778821

*Предложены логико-математические модели луговых ценозов, позволяющие обнаруживать сдвиги равновесий, вызванные развитием промышленности и поступлением отходов в атмосферу.*

*The logic-mathematic models of the meadow tzenozes are offered. They allow to discover shifting, which are caused by the developing of industry and penetrating some waste materials to the atmosphere.*

Поступлення в атмосферу і гідросферу відходів промисловості, будівництво цивільних і промислових споруд, прокладання нових та удосконалення існуючих доріг, розширення туризму викликали істотні зміни в біосфері. На Прикарпатті, зокрема, науковці виявили зниження урожайності окремих видів дикоростучих рослин (плаун баранець, плаун булавовидний, арніка гірська), зрушення рівноваги біохімічних процесів в організмах, прояв яких спостерігається в медико-географічних аномаліях, погіршенні кормової якості різнотравно-злакових лук, ураженні лісів кореневою губкою, порушеннями в кінетиці синтезу травами біологічно активних речовин [1,2]. Для раціонального ведення господарства доцільно враховувати екологічний стан регіону, своєчасно передбачати відхилення рівноваг у природі, сформованих впродовж тисячоліть.

На Прикарпатті при експлуатації родовищ в атмосферу та гідросферу поступають відходи виробництва. Приміром, в останні роки в межах Південно-Долинського нафтоконденсатного родовища концентрація солей в ґрунтових водах багатократно зросла і в окремих місцевостях досягла 6,5 г/л. Це зрушення виникло тому, що на різних стадіях розробки та експлуатації родовища ґрунтові води змішуються з пластовими, які представлені розсолами хлоридного типу. В околицях м. Надвірна внаслідок забруднення атмосфери оксидами сірки, що утворюються при переробці нафти, випадають кислотні дощі; рН опадів знижується до значення 3. Промисловість завдає шкоди живим істотам, приуроченим до території.

Пропонована модель дасть змогу на території Передкарпатської нафтогазоносною провінції зменшити негативну дію промисловості на довкілля. Вона апробована для пошуку рослин, що продукують речовини з антибластичними властивостями залежно від ґрунтово-кліматичних умов їхнього розвитку [3]. Методику спостереження лучних ценозів запозичено в науково-дослідній установі ВІЛР (Всесоюзный институт лекарственных растений) [4]. Прикладне застосування моделі можна поширити на прогнозування розвитку фітоценозів з метою дослідження продуктивності цінних видів дико-

ростучих рослин, синтезу травами цінних речовин, поширення хвороб деревостанів або шкідників лісу. Прогнозування розвитку фітоценозів з використанням пропонованих моделей не вимагає застосування дорогої апаратури або дефіцитних реактивів і дозволяє одержувати потрібну інформацію в обхід вивчення на молекулярному рівні процесів, які відбуваються в рослинах.

В основу моделі взято припущення, що з року в рік фітоценози зазнають незначних змін: видового складу, урожайності окремих видів дикоростучих рослин, інтенсивності продукування метаболітів. Модель дозволяє проводити дослідження не вникаючи в причини, що призвели до змін і не вивчаючи біохімічні перетворення, що супроводжують розвиток організмів, але при цьому одержувати вагомий інформацію. Дослідження необхідно провести не менше двох разів в різні роки в один і той же період вегетації. Допускають, що фітоценози щорічно зазнають однакових змін, а їхній розвиток не обмежений в часі.

Дослідник не враховує періодичні зміни фітоценозів, що відбуваються протягом року: маси рослин, концентрації тих або інших речовин в органах, ріст і відмирання квітів, листків, стебел. Вимагається виявити закономірність змін з інтервалом кратним року. Пропоновані умови вимірювань дозволяють розглядати процес розвитку фітоценозу рівномірним, а функцію, що цікавить дослідника – залежно від часу як неперервну і диференційовану. Це припущення широко застосовують при побудові моделей біологічних процесів і явищ, що і дає позитивні результати [5].

Нехай об'єктом вивчення є лука, де поширений вид рослин, який визначає її експлуатаційну цінність. Зручно поіменувати його умовно видом  $A$ . Виникла потреба з'ясувати закономірність зміни урожайності надземної частини цієї рослини у найближчі роки. Видом  $A$  може бути одно- або багаторічна рослина. Протягом часу спостереження її розвиток супроводжується збільшенням або зменшенням маси надземної частини. Існує залежність зміни маси рослини  $m$  від часу  $t$ .

**Таблиця 1 — Урожайність квітів арніки на луці у початковому та наступному роках (в грамах)**

Рік	Урожайність квітів арніки на облікових ділянках (г)														
1991	3,8	4,6	3,1	5,4	4,7	3,9	6,2	4,4	4,8	4,0	4,3				
1992	4,2	3,9	4,6	4,3	3,6	2,5	5,1	3,7	4,1	4,8	5,8	4,5	4,2	4,3	

Функція

$$m=f(t) \quad (1)$$

не є періодичною.

При складанні математичної моделі лучного ценозу враховано, що приріст маси рослини виду *A* залежить від початкової їхньої маси та часу, протягом якого ведуться спостереження. Складаючи диференціальну модель виходили з гіпотези, що приріст маси рослин  $\Delta m$  прямо пропорційний масі рослин  $m$  в момент  $t$  та тривалості процесу  $\Delta t$ , тобто  $m=k \cdot m \cdot \Delta t$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Перейшовши до границь при  $\Delta t \rightarrow 0$  перепишемо одержане диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dm}{m} = k \cdot dt.$$

Проінтегрувавши його, одержимо

$$\ln m = kt + \ln C,$$

де  $C$  — стала інтегрування.

Для розв'язування задачі Коші враховано, що в початковий момент спостережень при  $t=0$  урожай рослин виду *A* становив  $m_0$ , що відповідає замірам у початкових спостереженнях, звідки  $C = m_0$ . Таким чином, шукана модель

$$m = m_0 e^{kt}. \quad (2)$$

Вона дійсна також у випадку, якщо маса рослин з часом зменшується і тоді дослідник знайде, що  $k < 0$ .

У польових умовах роботу виконують у такій послідовності: на поляні закладають 10-30 облікових ділянок, розподіливши їх так, щоб рівномірно охопити всю територію [6]. Площу облікових ділянок в 1 кв.м зручно намічати дерев'яними палками, довжиною 1 м. На кожній із них повністю зривають надземну частину рослин виду *A*, зважують, записавши у польовому журналі масу свіжозірваних рослин. Нумерація облікових ділянок не обов'язкова. На наступний рік заміри повторюють. Число облікових ділянок та їх розміщення не мусять співпадати з попередніми.

Розрахунок проводять за такою схемою: знаходять середнє арифметичне урожайності рослин виду *A* на облікових ділянках у перший рік спостережень  $m_0$ , та на наступний рік  $m_1$ . У формулу (2) підставляють числові значення  $m_0$ ,  $m_1$  та  $t=1$  і знаходять коефіцієнт  $k$ . Користуючись одержаною моделлю можна розрахувати середню масу рослин на досліджуваній зарості через потрібне число років, тобто при  $t=n$ .

Для розрахунку урожайності луки необхідно перемножити середню урожайність одиниці площі луки (1 кв. м) на всю її площу. Якщо є можливість на цій же луці повторити за-

міри через 2, 3 і більше число років, тоді у знайдену математичну модель вводять корективи. Маючи декілька точок з координатами  $m$  і  $t$  у відповідній системі координат на площині проводять експоненту так, щоб вона проходила якомога ближче до цих точок. За побудованим графіком знаходять сталу  $k$ . Разом з тим, для виконання розрахунків зручніше користуватись регресійним аналізом, обходячи графічне зображення функції. Для цього користуються ЕОМ та відповідними програмами.

Приклад розрахунку. Досліджували урожайність квітів гірської арніки на луці площею 3 га. Результати спостережень у перший та наступний рік наведені в табл. 1.

Середнє значення урожайності квітів арніки на площі луки в 1 м<sup>2</sup> в початковий та наступний роки відповідно становили  $m_0 = 4,47$  і  $m_1 = 4,26$ , а урожайність всієї луки відповідно  $m_0 = 4,47 \cdot 3 \cdot 10^4 = 13,41 \cdot 10^3$  або 13,4 кг і  $m_1 = 4,26 \cdot 3 \cdot 10^4 = 12,78 \cdot 10^3$  або 12,8 кг.

Користуючись рівнянням (2), підставивши замість символів відповідні числа, запишемо  $12,8 = 13,4 e^{k}$ . Знайдемо  $k = -0,0458$ . Таким чином, шукана модель  $m = 13,4 e^{-0,0458t}$ .

За одержаною моделлю можна прогнозувати, що у 2010 році, тобто через 19 років після початкових спостережень урожайність квітів арніки на досліджуваній луці становитиме  $m_{2010} = 13,4 e^{-0,0458 \cdot 19} \cdot 3 \cdot 10^4 = 5,61 \cdot 3 \cdot 10^4$ , або 1,68 кг.

Досліднику найчастіше бажано встановити причину зниження урожайності цінної рослини. Прокладання доріг, будівництво різноманітних споруд, вирубування лісів або насадження рослин неодмінно призводить на значних територіях до порушення режиму ґрунтових вод. Давно сформований рослинний покрив, у свою чергу, зазнає змін. Конкурентна спроможність кожного виду рослин, а також окремих особин в нових умовах зростає, або знижується і тому відбуваються швидкісні перетворення ботанічного складу фітоценозів. Такий розвиток природи не завжди корисний для людей та іноді може завдати відчутну шкоду господарству.

За спостереженнями науковців в Карпатах наслідками зрушень найчастіше є зміна умов засвоєння рослинами води з ґрунту. Пропонуємо модель, застосування якої дозволяє прогнозувати розвиток фітоценозів в умовах зниження постачання вологи рослинам, тобто в умовах засухи.

Модель побудована з врахуванням найістотніших закономірностей формування лук. Розвиток рослин обумовлений, головним чином, реакцією фотосинтезу. Це процес утворення зеленими рослинами органічних речовин з вуг-

лекислого газу і води за допомогою світлової енергії, що поглинається хлорофілом. Фотосинтез є основним способом живлення рослин, за рахунок якого утворюється 95% врожаю.

Водний режим рослин складається з трьох послідовних процесів: надходження води в корені з ґрунту; підняття її по коренях і стеблах у листки та ембріональні тканини надземної частини — точки росту; випаровування надлишку води з листків у атмосферу (транспірація). Різні рослини неоднаковою мірою потребують зволоження ґрунту. Іноді, глибоко проростаючи, корені досягають рівня ґрунтової води. Рослини здатні засвоювати воду також через листки.

Кожен вид рослин характеризується різною здатністю переживати засушливі періоди. Запобігати висиханню допомагають механізми, за допомогою яких рослині вдається при сухому повітрі і ґрунті зберегти достатню для життя вологість тканин. Це досягається завдяки ефективному поглинанню води із середовища шляхом розширення кореневої системи, зменшення транспіруючих поверхонь, ефективному захисту від кутикулярної транспірації, запасанням вологи і підвищенням здатності проводити воду тканинами.

Об'єктом спостереження є лука. Рослини, що привернули увагу дослідників умовно поіменують видом А. Ними можуть бути кормові культури, бур'яни, або види, що використовуються як сировина для виготовлення ліків, продуктів харчування, миючих засобів, інших промислових виробів.

Вибираючи лучний ценоз для спостереження, бажано, щоб усі його частини були у рівноцінних умовах щодо сонячної радіації. Поверхня поляни повинна нагадувати площину без помітної кривизни, заглиблень чи горбів. За розмірами територія може бути довільною: від частини до декількох гектарів.

Не беручи до уваги другорядні фактори можна вважати, що швидкість росту рослин залежить від здатності їх використовувати воду, вуглекислий газ та сонячну радіацію. У межах поляни концентрація вуглекислого газу в повітрі та сонячна радіація по всій території є приблизно однорідними. Тоді за законом Лібіха дефіцит води впливає найістотніше на ріст, оскільки цей фактор перебуває в стані кількісного мінімуму. Крім цього, амплітуда коливань водозабезпечення найбільша серед перерахованих причин розвитку і залежить від рівня ґрунтових вод, гранулометричного складу ґрунту та геологічної будови регіону. Таким чином, можна допустити, що в умовах засухи маса рослин ( $m$ ) залежить, головним чином, від можливості засвоювати воду, тобто від їхньої вологості ( $\omega$ )

$$m=f(\omega). \quad (3)$$

В основу моделі закладемо гіпотезу за якою приріст маси рослин дорівнює сумі мас приросту сухої речовини, утвореної в результаті фотосинтезу та води, яка забезпечує зволоження приросту. Наприклад, рослини масою  $m$  з масовою часткою води в них  $\omega$  засвоїли воду. При цьому масова частка води зросла на  $\Delta\omega$ ,

тобто в рослини поступила вода масою  $m\Delta\omega$ . Частина води масою  $k\Delta m$  використана рослиною на фотосинтез безводної біомаси ( $k$  — коефіцієнт пропорційності), а залишок масою  $\omega\Delta m$  забезпечив зволоження приросту. Тобто

$$m\Delta\omega = k\Delta m + \omega\Delta m.$$

Перейшовши до границь, запишемо це у виді диференціального рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{d\omega}{k + \omega} = \frac{dm}{m}. \quad (4)$$

Після інтегрування (4) запишемо

$$\ln(k + \omega) = \ln m + \ln C \text{ або } k + \omega = m + C,$$

де  $C$  — постійна інтегрування.

Враховуючи, що при  $\omega = \omega_0$   $m = m_0$ , знайдемо

$$c = \frac{k + \omega_0}{\omega_0}. \quad (5)$$

Це рівняння (5) прямої і його можна записати у вигляді

$$m = k\omega + b, \quad (6)$$

де  $k$  і  $b$  — сталі.

У польових умовах при дослідженні луки модель застосовують у такій послідовності: на поляні закладають 20-30 облікових ділянок, площею в 1 м<sup>2</sup> розподіливши їх так, щоб рівномірно охопити всю територію. На кожній із них повністю зривають надземну частину рослин виду А, зважують, поміщають у паперові торбинки, записавши відповідно масу свіжо зірваних рослин.

Проби рослин доставляють у приміщення і після висушування до повітряно-сухого стану знову зважують. Одержані числові результати записують у польовий журнал.

Математичну обробку числового матеріалу проводять на ЕОМ. Віднявши від маси свіжих рослин масу висушених, знаходять масу видаленої води. Розділивши цей результат на масу свіжих рослин, підраховують масову частку води в рослинах. Таким чином, для кожної облікової ділянки одержують дві кількісні характеристики: масу рослин  $m$  і масову частку води в них  $\omega$ .

Будують графік в координатах  $\omega, m$ . Оскільки для кожної ділянки є дві кількісні характеристики, зображають їх на площині точками. Число точок відповідає числу облікових ділянок. Нанісши точки в системі координат  $\omega, m$  проводять пряму так, щоб вона проходила як можна ближче до них. Користуючись методами аналітичної геометрії за графіком знаходять сталі  $k$  і  $b$  і записують аналітичний вираз рівняння нарисованої прямої, тобто шукану модель. Користуючись методами статистики та ЕОМ рівняння прямої можна знайти з більшою точністю та при меншій затраті часу без побудови графіка.

Математична обробка результатів спостережень може завершитись однією із трьох можливостей. Коефіцієнт  $k > 0$ , тобто із зростанням масової частки води в рослинах виду А збіль-

шується їхня урожайність. Це свідчить, що рослини відчувають негативний вплив дефіциту води і вологість ґрунту відіграє провідну роль у формуванні фітоценозу. Можливий випадок, коли  $k < 0$ , із зростанням вологості рослин виду  $A$  зменшується їхня урожайність. Таку, на перший погляд, парадоксальну ситуацію можна зрозуміти враховуючи, що оточуючі рослини при збільшенні вологості краще проявляють конкурентні властивості порівняно з рослинами виду  $A$ . Програшна ситуація в конкурентній боротьбі веде до зменшення урожайності рослин виду  $A$ . Можливий випадок, коли точки розсіяні по координатній площині і коефіцієнт кореляції  $\rho = 0$ , модель не відповідає досліджуваному об'єкту.

Приклад застосування моделі. В останні роки в травостоях на схилі гори знижувалась урожайність рослин виду  $A$ . Замовник просив з'ясувати причину небажаного явища і, за можливістю попередити його. Первинне обстеження території спонукало дослідника запідозрити домінуючою причиною зрушення рівноваги біохімічних процесів, що обумовлюють розвиток рослин, зміну водного режиму.

На досліджуваній зарості заклали 42 облікові ділянки площею  $1 \text{ м}^2$  кожна. Визначали урожайність ( $m$ ) надземної частини рослин виду  $A$  і масову частку води в них ( $\omega$ ). Одержали 42 пари чисел, ввели їх в пам'ять комп'ютера, запустили розрахунок за програмою лінійного рівняння регресії:  $m = a\omega + b$ . Одержали такий результат: кутовий коефіцієнт  $a = -0,95$ ; вільний член рівняння  $b = 4,27$ ; коефіцієнт кореляції  $r = 0,682$ . Тобто рівняння має вигляд:  $m = 4,27 - 0,95\omega$  при достатньо високому коефіцієнті кореляції.  $m$  — урожайність рослин в грамах,  $\omega$  — масова частка води в цих рослинах.

Рівняння засвідчує, що підвищення вологості рослин, які цікавлять еколога, супроводжується зниженням урожайності. В умовах покращання засвоєння води, знижується спроможність конкурувати цінній рослині з оточуючими травами. Важливою причиною небажаних зрушень дослідник вважає прокладання дороги на схилі гори.

Водний режим розвитку рослин обумовлює не тільки їхню урожайність. Вода приймає участь в різноманітних біохімічних процесах, в продукуванні метаболітів, є важливою складовою обміну речовин. При випаровуванні води виникає послаблення тургору клітин та в'янення тканин. Це підсилює процеси розкладу речовин, що входять в склад клітин, збільшує їхню витрату на дихання, а також порушує енергетичний баланс. В результаті знижується стійкість рослин до збудників хвороб.

Наведені міркування приводять до висновку про існування в рослинах лінійної залежності інтенсивності біосинтезу метаболітів від масової частки води в їхніх органах. Результати експериментів не суперечать цьому [7]. Рівняння регресії, що визначають лінійну залежність показника біологічної активності екстрактів від

вологості свіжо зірваних рослин іноді характеризуються високим коефіцієнтом кореляції.

Тому, пропонованою моделлю зручно користуватись при пошуках ґрунтово-кліматичних умов розвитку рослин з метою виявлення можливостей досягти максимальну продуктивність синтезу цінних речовин [8]. Ведення дослідів можна удосконалювати, зменшити витрати часу на аналіз біологічної активності препаратів, частково замінивши їх визначенням вологості рослин.

Пропоновані моделі перспективні для ведення досліджень лучних ценозів Прикарпаття з метою їхньої раціональної експлуатації, розробки унікальних послуг туристам щодо відпочинку і оздоровлення. З цими моделями бажано знайомити студентів, які вивчають моделювання і прогнозування стану довкілля.

### Література

- 1 Адаменко О.М., Приходько М.М. Регіональна екологія і природні ресурси (на прикладі Івано-Франківської області). — Івано-Франківськ, 2000. — 278 с.
- 2 Бабенко Г. Біосфера, антропогенез і здоров'я. — Івано-Франківськ, 1999. — 204 с.
- 3 Лабий Ю.М. Продуцирование папоротником биологически активных соединений в зависимости от содержания в почве магния и свинца // Съезд Украинского ботанического общества: Тез. докл. — К.: Наукова думка, 1982. — С.92-93.
- 4 Крылова И.А., Шретер А.И. Методические указания по определению запасов дикорастущих лекарственных растений. — М, 1971. — 15 с.
- 5 Призва Г.Й. Дифференціальні моделі в біології та екології // У світі математики. — 1995. — Т. 1. — Вип. 1. — С. 12-20.
- 6 Крылова И.А. О некоторых методических вопросах определения запасов лекарственных растений СССР // Материалы Всесоюзного научно-технического совещания по изучению и использованию запасов дикорастущих лекарственных растений. — М, 1972. — С. 56-58.
- 7 Лабий Ю.М. О повышении точности измерения противоопухолевой активности препаратов // Измерения в медицине и их метрологическое обеспечение: IX Всесоюзная конференция. — М., 1989. — С. 150.
- 8 Лабий Ю.М. Сравнительная оценка противоопухолевой активности экстрактов из лекарственных растений Предкарпатья // Ботанические исследования на Украине. — К.: Наукова думка, 1990. — С. 60-61.