

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ВЕРИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ РОЗРІЗАНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ТІЛОМ

¹А.С. Величкович, ²Т.М. Даляк

¹ ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 507626,
e-mail: o r t @ n i n g . e d u . u a

²Івано-Франківський сектор Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
тел.(050) 8661041, e-mail: t d a l y a k @ g m a i l . c o m

Представлено опис процесу верифікації скінченно-елементної моделі контактної взаємодії циліндричної оболонки з розрізом та пружного тіла. Адекватність побудованої моделі підтверджується порівнянням результатів кінцево-елементного аналізу з результатами натурних експериментів. Основними параметрами для порівняння були вибрані радіальні та осьові переміщення оболонки, кільцеві напруження на поверхні оболонки та залежності осадка–навантаження. Процедура ідентифікації розрахункових даних з експериментальними проілюстрована на кількох характерних прикладах. Вказано головні передумови успішного застосування стандартних схем методу скінченних елементів. Побудовано скінченно-елементне розбиття оболонки та пружного тіла з обґрунтуванням вибору типу елемента. Звернуто увагу на особливості отримання розв'язків контактних задач числовими методами в практиці інженерного проектування. Із застосуванням ітераційних алгоритмів побудови розв'язку контактних задач отримано розподіл напружень та переміщень заповнювача і оболонки, у вибраних точках наведено графічний порівняльний аналіз числових результатів та експериментальних даних. У результаті проведених досліджень одержано скінченно-елементну модель контактної взаємодії циліндричної оболонки з розрізом та пружного тіла, що придатна для аналізу напружено-деформованого стану та вивчення експлуатаційних характеристик низки конструкцій пружних елементів бурових засобів вибродохисту.

Ключові слова: циліндрична оболонка, розріз, пружне тіло, скінченно-елементна модель.

Представлено описание процесса верификации конечно-элементной модели контактного взаимодействия разрезанной цилиндрической оболочки с упругим телом. Адекватность построенной модели обеспечивается сравнением результатов конечно-элементного анализа с результатами натурных экспериментов. Основными параметрами для сравнения были выбраны радиальные и осевые перемещения оболочки, кольцевые напряжения на поверхности оболочки и зависимости осадка–нагрузка. Процедура идентификации расчетных данных с экспериментальными проиллюстрирована на нескольких характерных примерах. Указаны главные предпосылки успешного использования стандартных схем метода конечных элементов. Построена конечно-элементная сетка конструкции с обоснованием выбора типа элемента. Обращено внимание на особенности получения решений контактных задач числовыми методами в практике инженерного проектирования. С применением итерационных алгоритмов построения решения контактных задач найдено распределения напряжений и перемещений заполнителя и оболочки, в некоторых точках приведен графический сравнительный анализ численных результатов и экспериментальных данных. В результате проведенных исследований получена конечно-элементная модель контактного взаимодействия цилиндрической оболочки с разрезом и упругого тела, применимая для анализа напряженно-деформированного состояния и изучения эксплуатационных характеристик ряда конструкций упругих элементов буровых средств вибродошистки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, разрез, упругое тело, конечно-элементная модель.

The description of the process of verification of finite-element model of contact interaction of a cylindrical shell with a cut and an elastic body is presented. The adequacy of the constructed model is provided by comparing the results of finite-element analysis with the results of field experiments. The main parameters for comparison were chosen such as radial and axial displacement of the shell, annular tension on the surface membrane and draft-load dependence. Identification procedure of calculation and experimental data is illustrated by several typical examples. The main preconditions for successful use of standard finite element schemes are specified. The finite-element partitioning of structural elements is constructed with the justification of item type choice. Attention is paid to a solution of contact problems' numerical methods in engineering design practice features. With the use of iterative algorithms of contact problems' solution the distribution of stresses and displacements filler and shell is obtained, the graphical comparative analysis of numerical results and experimental data is given by some points. As a result of the studies the finite-element model of a cylindrical shell contact interaction with a cut and an elastic body, that is suitable for analyzing the stress-strain state and study the performance of several designs of elastic elements of drilling vibration protection, is obtained.

Keywords: cylindrical shell, cut, elastic body, finite-element model.

Робота низки конструкцій оболонкових пружин для бурових засобів віброзахисту базується на контактній взаємодії циліндричної оболонки з розривом та пружного тіла [1–4]. Варіювання геометричними та механічними характеристиками оболонки та пружного тіла дає змогу змінювати сукупні характеристики в досить широкому діапазоні, задовольняючи експлуатаційні та технологічні потреби. Отримати аналітичні розв'язки таких задач у тривимірній постановці досить важко з огляду на відсутність геометричної симетрії та нелінійність математичних моделей, пов'язаних з наявністю сил тертя і контактної взаємодії елементів. Одним із способів аналізу напружено-деформованого стану є використання числових методів, зокрема методу скінчених елементів. При застосуванні цього методу інженер повинен бути впевненим в коректності числової моделі та її відповідності реальному об'єкту. Важливо знати, з якими похибками буде отримано результати, адже у випадку великих похибок розрахунків втрачає зміст. Тому, безумовно, проблема верифікації математичних моделей є вельми актуальною.

При розв'язуванні контактних задач маємо дві основні проблеми. Перша полягає в тому, що зона контакту тіл априорі невідома. Залежно від граничних умов, зовнішніх, фізичних та геометричних факторів поверхні оболонки та пружного тіла можуть контактувати одна з одною та виходити з контакту непередбачувано. Друга проблема пов'язана з необхідністю врахування тертя при моделюванні взаємодії тіл. Маємо нелінійну задачу, яку потрібно розв'язувати поетапно. У разі використання скінченно-елементної моделі розв'язок такої задачі потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому вочевидь при побудові моделі треба дотримати певний баланс, створивши таку сітку елементів, яка при забезпеченні належної точності результатів, дозволить одержувати ці результати відносно швидко. Дана робота полягає у встановленні адекватних параметрів скінченно-елементної моделі для їх використання у подальших дослідженнях.

Аналіз літератури та інших інформаційних джерел з даної проблеми, а також власний досвід авторів щодо використання числових методів в проектуванні, дозволили сформулювати таке бачення ситуації. На сьогодні успішне застосування стандартних схем методу скінчених елементів в практиці інженерного проектування передбачає зведення до мінімуму втручання користувача в обчислювальний процес, це особливо актуально для тих користувачів, які не є фахівцями в сфері числових методів загалом. Однак, налагоджене у такий спосіб програмне забезпечення не гарантує прийнятності та точності отриманих числових розв'язків, оскільки в реальних задачах неможливо заздалегідь побудувати сітку скінчених елементів, на якій локальна похибка дискретизації рівномірно розподілена по елементах, а глобальна похибка задовольняє наперед заданий критерій точності. Досвід роботи з методом

скінчених елементів та інженерними програмами, які використовують цей метод, чітко вказує на те, що значущість кінцево-елементного аналізу як інструменту значною мірою залежить від наявності таких чинників: банк надійних експериментальних даних; досвід розрахунку іншими методами чи можливість застосування тестових задач; високий практичний рівень фахівців в області механіки деформівного твердого тіла. Лише при поєднанні усіх цих чинників на етапі створення моделі можна розраховувати на стабільний успіх.

Інший бік проблеми – це забезпечення вдалого використання числових методів власне в контактних задачах. На сьогодні відома ціла низка підходів щодо вирішення контактних задач методом скінчених елементів [5-8]. Найбільш простий з алгоритмічної точки зору прийом заснований на обчисленні коефіцієнтів взаємного впливу точок контактуючих тіл в нормальному і дотичному напрямках. За допомогою класичного методу сил для опису рівноваги кожного тіла знаходиться розподіл контактних напружень. Пізніше отримані значення контактних напружень використовуються як граничні умови для визначення напруженого стану контактуючої пари. Межі контактних ділянок та ділянок проковзування знаходять ітераційним шляхом. Поряд з відносною простотою такий метод не позбавлений недоліків, основним з яких є необхідність розв'язування задачі на етапі визначення коефіцієнтів податливості $2n$ разів, де n – число точок контакту.

Ще одна група методів розв'язання контактних задач методом скінчених елементів базується на тому, що умови взаємодії між тілами моделюються за допомогою співвідношень фізично нелінійних задач механіки твердого тіла. Зазвичай тут проводиться аналогія механіки контактного середовища із законами пластичності і повзучості. Переваги такого підходу є відчутними при вирішенні контактних задач пружнопластичності [6].

Інший підхід полягає у використанні спеціальних з'єднувальних чи розривних елементів, що моделюють діаграму сила – переміщення на поверхнях розмежування контактуючих тіл [5].

Дієвими є способи розв'язування контактної задачі без використання будь-яких аналогій і стикувальних елементів. Тут контактуючі тіла розглядаються як окремі елементи. Загальну систему рівнянь доповнюють певною кількістю рівнянь сумісності, яка є кратною числу контактуючих вузлів. Для отримання розв'язків застосовується покроковий процес навантаження з уточненням граничних умов на кожному кроці ітераційним методом. Прирости навантаження вибираються малими щоб зберегти лінійний зв'язок між переміщеннями та деформаціями в межах кожного кроку навантаження. Саме такий підхід, що вимагає багаторазового розв'язування крайової задачі та використання ітераційних алгоритмів корегування граничних умов, ми вибрали для отримання числових розв'язків.



а) – лабораторні зразки оболонкових пружин; б) – оболонкова пружина з розрізом обладнана електротензодавачами

Рисунок 1 – Зразки об'єктів дослідження

Загалом при застосуванні будь-якого підходу основна складність розв'язування контактних задач з урахуванням тертя методом скінченних елементів полягає у виконанні умов непроникнення, а також додаткових кінематичних умов на заздалегідь невідомих межах. Для виконання умов контакту при кінцево-елементній реалізації часто застосовують метод множників Лагранжа, метод штрафу (penalty method), узагальнений метод множників Лагранжа (Augmented Lagrange Method), пряме розв'язування варіаційної задачі методами квадратичного програмування.

Не зважаючи на різноманіття методів і способів застосування скінченних елементів [5-7] та на стрімкий розвиток повністю автоматизованих, універсальних скінченно-елементних систем проектування [8-9], проблема перевірки коректності числових моделей не має стандартного вирішення і часто залишається поза увагою.

Метою даної роботи є створення адекватної скінченно-елементної моделі контактної взаємодії розрізаної оболонки з пружним тілом шляхом ідентифікації низки результатів одержаних методом скінченних елементів з результатами експериментальних досліджень натурних зразків. Числові результати одержували на моделях, при побудові яких використовували різні типи скінченних елементів, варіювали

щільність та спосіб розбиття сітки. Процедура ідентифікації складається з трьох етапів дослідження:

- експериментальне вивчення поведінки об'єкта моделювання;
- побудова математичної моделі;
- перевірка відповідності поведінки об'єкта і моделі.

Об'єктами експериментальних досліджень виступали натурні зразки пружних елементів бурових засобів віброзахисту та лабораторні моделі, які мають за несучу ланку циліндричну оболонку з розрізом вздовж твірної (рис. 1). Таке виконання конструктивно анізотропних несучих ланок створило можливість використати згин оболонок в умовах, близьких до плоскої деформації. У цих оболонкових пружинах підвищена податливість поєднується із необхідним рівнем розсіювання енергії, що зумовило їх вдале використання у низці галузей промисловості [2]. Тож задача про дослідження напружено-деформованого стану оболонки з розрізом, яка контактує з пружним тілом, має передусім прикладне значення. Існуючі оболонкові пружні елементи придатні для широкого використання у нафтогазовій, гірничій і металургійній промисловості, сільському господарстві, в авіа-, авто- та суднобудуванні, на залізничному транспорті, в машинах і механізмах, що зазнають значних динамічних навантажень і працю-

ють в агресивних середовищах (можливо із присутністю абразиву) чи в екстремальних температурних умовах. Для нафтогазової промисловості запропоновано засоби віброзахисту бурильної колони, амортизатори штангової свердловинної насосної установки, блочної кущової насосної станції, компресорів, трубопроводів, турбін та різноманітних приводів. Успішно використовують оболонкові пружини у пружних підвісах вибивних і транспортуючих модулів автоматичних ліній ливарного виробництва. Так, оболонкові амортизатори забезпечили безаварійність та істотно підвищили надійність і ефективність інерційно-ударних гра-ток [1, 2].

В експерименті зазвичай досліджувалась одна ланка пружного елемента, оскільки робота ланок у побудованих системах для промислового застосування є принципово однаковою. Зразки виготовлялись на серійному обладнанні вітчизняного виробництва, точність виготовлення дослідних зразків контролювалась мікрометром. Матеріал оболонок – сталь конструкційна легована 40ХНМА ГОСТ 4643-71. Як заповнювач використовувалась сира гума підвищеної маслобензостійкості марки 7-3826С ТУ 38-105-1082-86. Геометричні розміри несучих ланок були такими: внутрішній діаметр $d = 0,16\text{ м}$, товщини стінок: $0,005\text{ м}$; $0,007\text{ м}$; $0,01\text{ м}$; довжини оболонок: $0,1\text{ м}$; $0,2\text{ м}$; $0,3\text{ м}$; $0,4\text{ м}$; $0,5\text{ м}$; $0,6\text{ м}$; $0,8\text{ м}$; $1,0\text{ м}$.

Процес навантаження зразків здійснювався на універсальній випробувальній машині типу Р-50, що додатково обладнана автоматизованою вимірною системою ASTM-Digital.

При дослідженні напружено-деформованого стану несучих ланок оболонкових пружин використовувались дротяні тензодавачі на паперовій основі типу 2ПКБ з базою 10 мм та номінальним опором 100 Ом . Наклеєні на оболонку від 25 до 150 давачів підбирались з однієї партії так, щоб забезпечити мінімальне відхилення опору від номінального. За реєструючий пристрій було обрано цифровий тензометричний міст ЦТМ-5. Для запобігання температурним похибкам використано метод схемної компенсації – компенсаційні тензорезистори виносились до об'єкта дослідження і перебували в тих самих температурних умовах, що й активні давачі. З кожної групи тензодавачів таруванню піддавали 5% від загальної кількості. Результати тарування поширювались на всю групу.

Для визначення переміщень використовувався набір індикаторів годинникового типу ІЧ 10 МН . Також використовувались оригінальні тензометричні давачі лінійних переміщень у вигляді пластинчатих пружинних елементів з наклеєними на пластинчаті пружини електро-тензодавачами.

На перших етапах досліджень визначались радіальні та осьові переміщення несучої ланки оболонкової пружини при її різних товщинах. Наступні етапи були присвячені визначенню кільцевих напружень на зовнішній поверхні несучої ланки та побудові залежностей “осадка – навантаження оболонкової пружини” при різ-

них довжинах несучої ланки [10, 11]. Для здійснення верифікації отримані експериментальні результати ми прийняли як еталонні вимоги, які заздалегідь визначали поведінку скінченно-елементної моделі контактної взаємодії розрізаної оболонки з пружним тілом, опис остаточного варіанту якої наведемо нижче.

Розглянемо пружний деформівний циліндр (заповнювач) 2 (рис. 2) радіусом R , завдовжки $2a$, який заповнює циліндричну оболонку з розрізом вздовж твірної 1 завтовшки h . Введемо циліндричну систему координат r, β, z та розмістимо у площині, що рівновіддалена від поршнів. Заповнювач стискається на торцях абсолютно жорсткими, гладкими поршнями 3, до яких прикладене навантаження величиною Q . Необхідно дослідити елементи напружено-деформованого стану системи, враховуючи фрикційне проковзування заповнювача відносно оболонки.

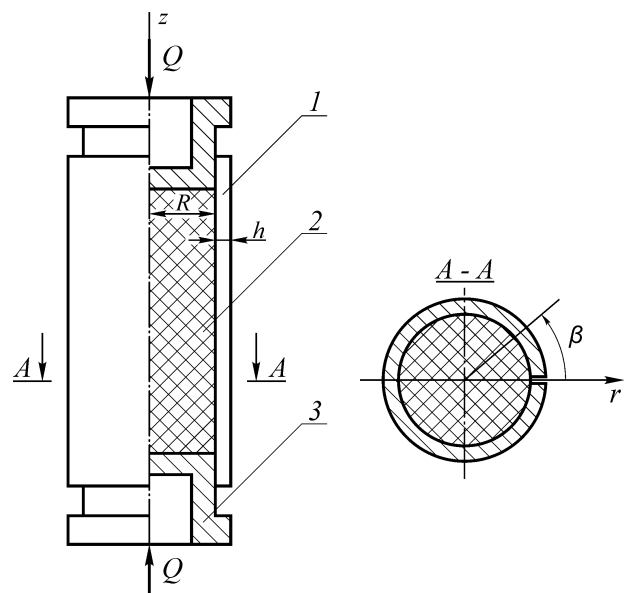


Рисунок 2 – Схема оболонкової пружини з розрізом

Зрозуміло, що жорсткість розрізаної оболонки в тангенційному напрямку менша, ніж уздовж твірної. Основний вклад у податливість системи буде вносити зміна форми пружного циліндра за рахунок згинної деформації розрізаної оболонки (зменшення кривини розімкненого кільця у поперечному перерізі). Розрізана оболонка згинається в умовах неосесиметричного контактного навантаження. Характер контактної взаємодії оболонки і заповнювача опишемо законом сухого тертя.

Важливим кроком у побудові скінченно-елементної моделі є вибір типу елемента та розбиття конструкції на елементи. У геометрично-складних формах конструкцій можна використовувати тетраедричні елементи, однак в контактних задачах часто такі елементи дають хибні результати. Найбільш оптимальним, на наш погляд, є використання гексагонального восьмивузлового елемента з лінійними функціями форми. Точніші розв'язки можна отримати,

застосувавши квадратичний двадцятивузловий елемент, проте у контактних задачах додаткова кількість вузлів збільшує час розрахунку настільки, що використання таких елементів стає невиправданим. На основні відомих співвідношень [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\mathbf{a}^e; \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{L}[\mathbf{u}(x)] = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}; \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

для випадку статичної рівноваги отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f},$$

де: $\mathbf{N}(x)$ – функції форми елемента, $\mathbf{u}(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – поля переміщень, деформацій та напружень відповідно; \mathbf{a}^e – переміщення вузлів елемента ($\mathbf{a} = \mathbf{a}^e$ – переміщення усіх вузлів конструкції); \mathbf{K} – матриця жорсткості; \mathbf{f} – вектор вузлових сил.

Модель контакту реалізуємо за допомогою наступних співвідношень:

$$\begin{cases} F_t = \mu F_n; \\ |\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_B - d| \leq d_t; \end{cases}$$

де перше співвідношення описує тертя за законом Кулона: F_t, F_n – відповідно дотична та нормальна складові сили, μ – коефіцієнт тертя між оболонкою та заповнювачем; друге співвідношення – геометрична умова контакту двох тіл (A і B): \mathbf{u} – поле переміщень одного тіла, \mathbf{n} – вектор нормалі границі іншого тіла, d, d_t – величина зони контакту та коефіцієнт уточнення контакту.

Оскільки маємо симетрію вздовж осі z , то з метою економії розрахункового часу розглянемо лише половину конструкції. На рис. 3 наведено схему розбиття оболонки та заповнювача. Тут розмір елемента не перевищує десятої частини радіуса заповнювача. Що стосується оболонки, то будувати надто густу сітку недоцільно, а надалі в окремих випадках будемо підвищувати щільність розбиття за необхідності уточнення чи більш детального аналізу особливостей одержаних результатів.

Порівняння результатів розрахунку, одержаних за допомогою побудованої скінченно-елементної моделі, з результатами експериментальних досліджень проведено для низки задач визначення елементів напружено-деформованого стану та знаходження експлуатаційних характеристик оболонкової пружини. Розбіжність результатів не перевищила 4%.

Проїлюструємо кілька характерних результатів графічно. За приклад виберемо систему з такими параметрами: внутрішній радіус оболонки $R = 0,08\text{ м}$; довжина оболонки $0,5\text{ м}$; довжина пружного тіла $0,4\text{ м}$; товщина стінки оболонки $h = 0,015\text{ м}$; коефіцієнт тертя пари оболонка-пружне тіло $0,5$; для матеріалу оболонки прийняли модуль Юнга $E_o = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$, модуль зсуву $G_o = 8 \cdot 10^{10}\text{ Па}$, коефіцієнт Пуассона

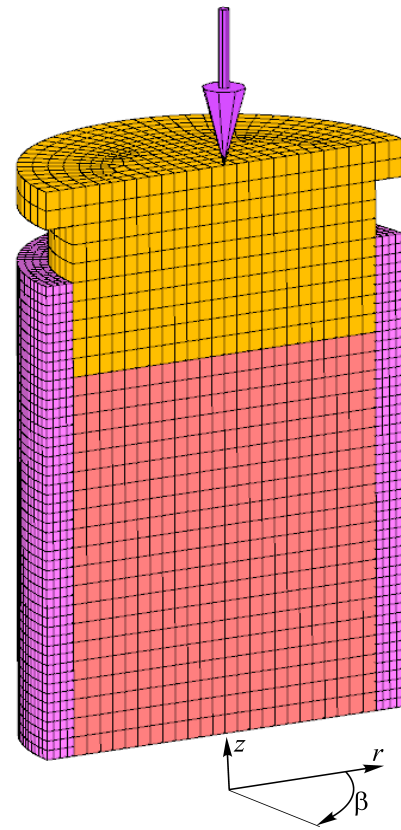


Рисунок 3 – Схема скінченно-елементної моделі контактної взаємодії розрізаної оболонки з пружним тілом

$\mu_o = 0,31$; для матеріалу пружного тіла прийняли модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^7\text{ Па}$, модуль зсуву $G = 7 \cdot 10^6\text{ Па}$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,4995$. Умови на торцях пружного тіла $\sigma_z(0,2) = -p \equiv -Q/\pi R^2$; зовнішня поверхня оболонки вільна від навантаження ($N_z(0,25) = 0$).

На рис. 4 зображено розподіл радіальних переміщень оболонки вздовж твірної $u_r(z)$ при значенні азимуту $\beta = 90^\circ$, які одержані з допомогою скінченно-елементної моделі та за результатами експериментальних досліджень.

На рис. 5 зображено розподіл кільцевих напружень $\sigma_\beta(z)$ на зовнішній поверхні оболонки вздовж твірної при значенні азимуту $\beta = 180^\circ$ (розрахункові та експериментальні дані). Тут через симетрію конструкції відносно площини, рівновіддаленої від поршнів, розглянуто половину системи. Як при розрахунку, так і в експерименті фіксували значення кільцевих напружень на кількох етапах навантаження.

Загалом порівняння результатів дослідних робіт та розрахунків на базі побудованої моделі показало їх хорошу збіжність. Можемо з упевненістю стверджувати, що створена в результаті процедури верифікації скінченно-елементна модель є цілком адекватною і щодо напружено-деформованого стану поводить себе як реальний об'єкт. Тепер, залишаючись у розумних

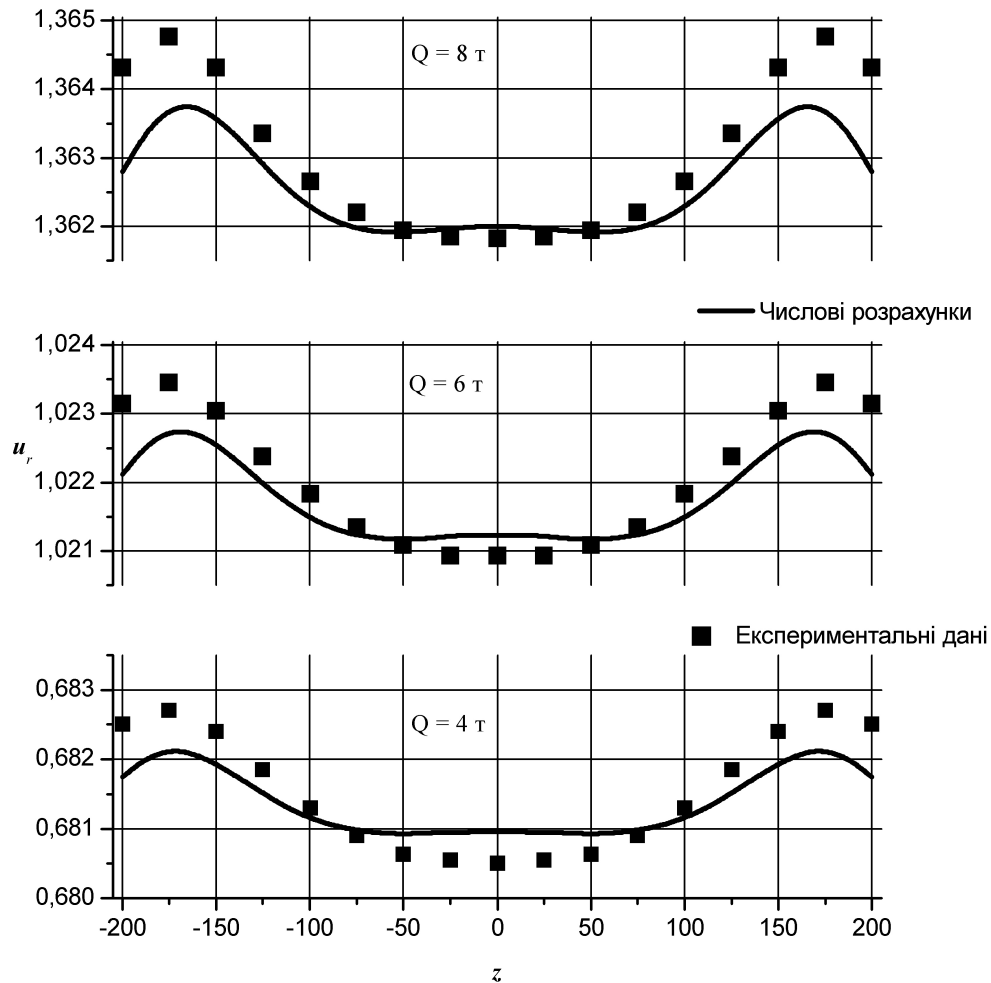


Рисунок 4 – Порівняння результатів розрахунку розподілу радіальних переміщень оболонки вздовж твірної (при $\beta = 90^\circ$), одержаних з допомогою скінченно-елементної моделі, з експериментальними даними

межах обчислювальних ресурсів та часових витрат, маємо можливість отримувати та аналізувати великі бази достовірних характеристик та властивостей змодельованого об'єкта, отримати які за допомогою натурних досліджень як за якістю, так і за об'ємом є вельми трудомісткою і складною задачею.

Завданнями наступних етапів досліджень є використання верифікованих математичних моделей контактної взаємодії циліндричної оболонки з розрізом та пружного тіла для розвитку та уточнення методів теоретичних розрахунків оболонкових пружних елементів для бурових засобів віброзахисту і, як наслідок, розроблення нових технічних та проектних рішень для систем віброзахисту.

Література

1 Величкович А.С. Комплекс засобів віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурильної колони / А.С. Величкович, С.В. Величкович, В.М. Шопа. – Івано-Франківськ: Сіверсія ЛТД, 2000. – 86с.: іл. – Бібліогр.: с. 84-86. – ISBN 966-7515-10-9.

2 Оболонкові пружини / [В.М. Шопа, А.С. Величкович, С.В. Величкович та ін.]. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92с. – Бібліогр.: с. 84-92. – ISBN 966-7327-77-9.

3 Величкович А.С. Амортизатор для штанговий скважинний насосної установки / А.С. Величкович // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – №10. – С. 21 – 23.

4 Попадюк І. Оболонкові пружини для вібраційної і віброзахисної техніки / Ігор Попадюк, Василь Шопа, Андрій Величкович // Теорія та практика раціонального проектування і експлуатації машинобудівних конструкцій : 2-а Міжнар. наук.-техн. конф., Львів, 11-13 листопада 2010 р. : праці конф. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2010. – С. 156–158.

5 Laursen A. Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis / A. Laursen – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong: Springer, 2002. – 454 P.

6 Wriggers P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. – John Wiley Sons: Chichester, West Sussex, England, 2002. – 442 P.

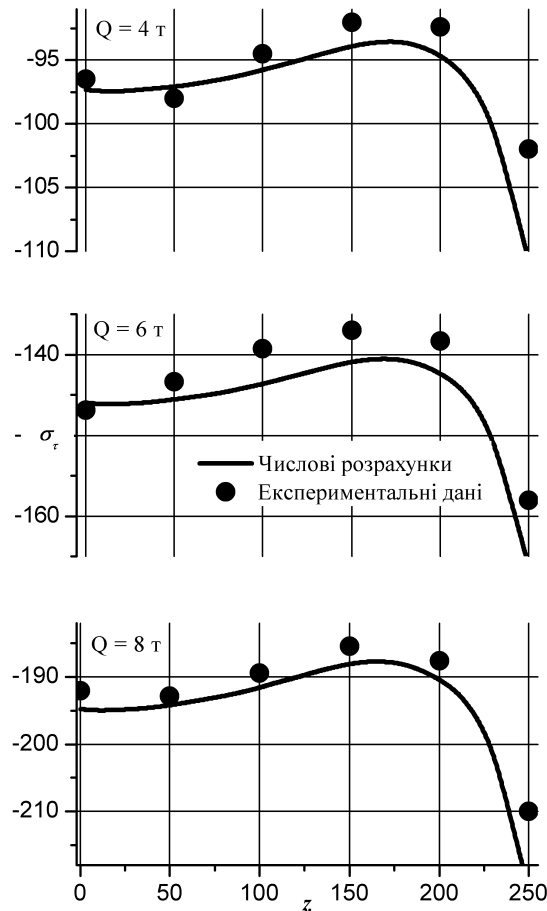


Рисунок 5 – Порівняння результатів розрахунку розподілу кільцевих напружень назовні оболонки вздовж твірної (при $\beta = 180^\circ$), одержаних з допомогою скінченно-елементної моделі, з експериментальними даними

7 Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite element method: Solid mechanics, Volume 2 / O. Zienkiewicz, R. Taylor. – Bristol: Butterworth-Heinemann, 2000. – 445 p.

8 Кабанов Ю. Контактные технологии в действии / Ю. Кабанов // ANSYS Solutions. Русская версия. – 2007. – №4. – С. 5 – 10.

9 Лепестов А. Autodesk Product Design Suite. Инновационное проектирование / А. Лепестов // CADmaster. – 2011. – №6. – С. 52 – 55.

10 Величкович А.С. Экспериментальные исследования оболочечного упругого элемента для буровых средств виброзащиты / А.С. Величкович, И.И. Попадюк, В.М. Шопа // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2010. – № 9. – С. 16–20.

11 Попадюк І. Експериментальні дослідження оболонкової пружини / Ігор Попадюк, Андрій Величкович, Василь Шопа // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур : VIII Міжнар. наук. конф., Львів, 14-17 вересня 2010 р. : тези доп. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 140–142.

12 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич – М.: Мир, 1975. – 543 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії

10.02.12

*Рекомендована до друку професором
М.В. Лисканичем*