УДК 519.876.5

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ ПЕРЕРІЗУ ЗА ДАНИМИ ВНУТРІШНЬОТРУБНОЇ ІНСПЕКЦІЇ ТРУБОПРОВОДІВ

***А.П.Олійник, Б.С.Незамай***

*ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) ,*
*e-mail: d u o l @ i l . i f . u a*

*Запропоновано математичну модель процесу деформування перерізу трубопроводу за даними внутрішньотрубної інспекції. Виведено основну систему рівнянь для визначення компонент вектора переміщень, задано граничні умови задачі з урахуванням даних внутрішньотрубної інспекції. Запропоновано чисельний метод розв'язання даної системи рівнянь з використанням різного типу функцій, що моделюють форму перерізу. Обговорено результат розрахунків для діючих ділянок трубопроводів.*

Ключові слова: магістральні трубопроводи, напружено-деформований стан, внутрішньотрубна інспекція, деформація перерізів, апроксимація форми перерізів.

*Предлагается математическая модель процесса деформирования сечения трубопровода по данным внутритрубной инспекции. Выведена основная система уравнений для определения компонентов вектора перемещений, заданы граничные условия задачи с учетом данных внутритрубной инспекции. Предложен численный метод решения данной системы с использованием различных типов функций, моделирующих форму сечения. Обсуждены результаты расчетов для действующих участков трубопроводов.*

Ключевые слова: магистральные трубопроводы, напряжонно-деформированое состояние, внутритрубная инспекция, деформация сечений, аппроксимация формы сечений.

*The mathematical model of the section deformation process using the pipeline intratubal inspection data is offered. The basic system of equations to determine the displacement's vector components is concluded, the boundary conditions is given taking into account the intratubal inspection data. The numerical method for the given system solution is suggested using the different kinds of functions, which model the section form. The results of calculation for the real-working pipelines fragments are discussed.*

Keywords: trunk pipeline, stress and strained state, intratubal inspection, section deformation, section aproksimation

## Вступ

Оцінка напружено-деформованого стану (НДС) магістральних трубопроводів є актуальною науково-технічною проблемою, оскільки досліджувані трубопровідні системи експлуатуються протягом тривалого часу (30-40 років) в складних геокліматичних умовах, під дією силових чинників різної природи, кількісні та якісні характеристики яких, як правило, невідомі. При цьому змінюються геометричні характеристики трубопроводу, властивості матеріалу, з якого вони виготовлені. Для оцінки реального технічного стану об'єктів, і зокрема їх НДС використовуються різноманітні експериментальні [1, 2] та теоретичні методи [3, 4]. Важливу роль під час оцінювання стану трубопроводів відіграють методи внутрішньотрубної інспекції трубопроводів з використанням інтелектуальних поршнів [5]. Зокрема, за допомогою апаратури фірми "Rozen Europe B.V." отримуються дані про зміну геометрії трубопроводу: конфігурації осі та форми перерізу [6]. На даний час вказані дані не використовуються для оцінки НДС трубопроводів, тому актуальним завданням є обгрунтування можливості використання методів математичного моделювання для оцінки НДС ділянок трубопроводу за даними внутрішньотрубної інспекції. Вплив зміни конфігурації осі трубопроводу на зміну його НДС розглядалося в багатьох роботах [7, 8], тому авторами пропонується математична модель процесу деформування перерізів за даними внутрішньотрубної інспекції.

## 1. Математична модель процесу деформування перерізів трубопроводу

Під час моделювання процесу деформування перерізів магістральних трубопроводів використовуються такі припущення:

1) вважається, що вектор переміщення довільної точки перерізу $\vec{U}$ має вигляд

$$\vec{U} = \vec{U}(U(r,\varphi); v(r,\varphi); 0), \qquad (1)$$

де $r, \varphi, z$ – циліндричні координати;

2) матеріал, з якого виготовлено трубопровід, є ізотропним;

3) розглядається модель пружного деформування тіла;

4) процес деформування має квазістаціонарний характер.

Проводячи обчислення за вказаних припущень в циліндричній системі координат обчислюємо компоненти тензора деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i), \qquad (2)$$

де $\omega_i$ – компоненти вектора переміщень; $\omega_1 = U(r,\varphi); \omega_2 = v(r,\varphi); \omega_3 = 0; \nabla_i$ – оператор коваріантного диференціювання в циліндричній системі координат [9]. За знайденими компонентами (2) визначаються компоненти тензора напружень за законом Гука для пружнодеформованого тіла:

$$P^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}, \qquad (3)$$

де: $p^{ij}; \varepsilon^{ij}$ – контраваріантні компоненти тензора напружень та деформацій відповідно; $\lambda, \mu$ – параметри Ламе матеріалу, з якого виготовлено трубопровід; $g^{ij}$ – контраваріантні компоненти метричного тензора в циліндричній системі координат.

Із залежностей (2) та (3) з урахуванням (1) одержуємо: $(x_1 = r; x_2 = \varphi; x_3 = z)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial U}{\partial r}; \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + Ur; \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}) - \dfrac{v}{r}; \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \ ; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} P^{11} = \lambda(\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{U}{r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}) + 2\mu\dfrac{\partial U}{\partial r}; \\ P^{22} = \lambda(\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{U}{r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi})\dfrac{1}{r^2} + 2\mu\dfrac{U}{r^3} + \\ \qquad + 2\mu\dfrac{1}{r^4}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}; \\ P^{33} = \lambda(\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{U}{r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}); \\ P^{12} = 2\mu[\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}) - \dfrac{v}{r}]\dfrac{1}{r^2}; \\ P^{13} = P^{23} = 0 \ . \end{cases} \qquad (5)$$

## 2. Основна система рівнянь та граничні умови

Використовуючи рівняння рівноваги в циліндричній системі координат (без урахування масових сил)

$$\nabla_j P^{ij} = 0, \quad i = 1,2,3; \ j = 1,2,3, \qquad (6)$$

одержуємо (з урахуванням (5)) такі рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} - \dfrac{U}{r^2} - \dfrac{2}{r^3}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + \\ \qquad + \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \ ; \\ \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} + \dfrac{1}{r}((3\mu+\lambda)\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} - \mu\dfrac{\partial v}{\partial r}) + \\ \qquad + \dfrac{1}{r^2}(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \ , \end{cases} \qquad (7)$$

де $R_{вн} \le r \le R_{зовн}; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ .

За даними внутрішньотрубної інспекції встановлюються значення переміщень на внутрішній:

$$\begin{cases} U(R_{вн}, \varphi_l) = U_{вl}, \quad l = 1,..,k \\ v(R_{вн}, \varphi_l) = v_{вl}, \quad l = 1,..,k \end{cases} \qquad (8)$$

та зовнішній поверхні трубопроводу:

$$\begin{cases} U(R_{зовн}, \varphi_l) = U_{зl}, \quad l = 1,..,k \\ v(R_{зовн}, \varphi_l) = v_{зl}, \quad l = 1,..,k \ , \end{cases} \qquad (9)$$

де: $\varphi_l$ – координата полярного кута на сітці, в точках якої визначаються переміщення, $k$ – кількість точок даної сітки. Використовуючи апарат інтерполяційного сплайну зі згладжуванням з урахуванням точності вимірювальної апаратури [7], можна одержати за значеннями (8),(9) неперервні граничні умови у вигляді

$$\begin{cases} U(R_{вн}, \varphi) = U_в(\varphi); \\ v(R_{вн}, \varphi) = v_в(\varphi); \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} U(R_{зовн}, \varphi) = U_з(\varphi); \\ v(R_{зовн}, \varphi) = v_з(\varphi) \ . \end{cases} \qquad (11)$$

Слід зазначити, що в системі (7) можна виділити відомі окремі випадки:

1. Якщо $\vec{U} = \vec{U}(U(r;0;0))$, то система (7) вироджується в єдине рівняння:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0, \qquad (12)$$

що дає розв’язок задачі Ламе про напружено-деформований стан труби під дією внутрішнього та зовнішнього тиску.

2. Якщо $\vec{U} = (0; v(r); 0)$, то система (7) також вироджується в єдине рівняння виду:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = 0, \qquad (13)$$

що дає розв’язок задачі про кручення циліндричної труби при прикладанні обертового моменту. При цьому з урахуванням граничних умов одержуємо (після переходу до фізичних компонент вектора переміщень):

$$v = C_1 r, \qquad (14)$$

де $C_1$ – константа, що залежить від величини прикладеного моменту.

## 3. Метод наближеного розв’зку задачі

З використанням (12)-(14), розв’язок (7) може бути знайдено у вигляді:

$$\vec{U} = \vec{r}(z,\varphi,r,t) - \vec{R}_0(z,\varphi,r,t_0), \qquad (15)$$

де: $\vec{R}_0(z,\varphi,r,t_0)$ – радіус-вектор точки трубопроводу в початковий момент (наприклад, проектне положення трубопроводу – прямолінійна ділянка), $\vec{r}(z,\varphi,r,t)$ – радіус-вектор точки трубопроводу в контрольний момент:

$$\vec{r}(z,\varphi,r,t)=\vec{r}_T(z)-R_2\vec{n}_T(z)+[\rho(z,\varphi,r,t)+U(r)]\times$$
$$\times[\cos(\varphi+\frac{M}{\frac{\pi\mu}{2}(R^4_{зовн}-R^4_{вн})})\times\vec{b}_T(z)+ \quad (16)$$
$$+\sin(\varphi+\frac{M}{\frac{\pi\mu}{2}(R^4_{зовн}-R^4_{вн})})\vec{n}_T(z)+\psi(z,\varphi,r,t)\vec{\tau}_T(z)];$$
$$0\le z\le L;\quad 0\le\varphi\le 2\pi;\quad R_{внут}\le r\le R_{зовн}.$$

В залежності (12) $\vec{r}_T(z);\vec{n}_T(z);\vec{b}_T(z);\vec{\tau}_T(z)$ – радіус-вектор точки твірної на поверхні трубопроводу, вектори нормалі, бінормалі та дотичної до твірної відповідно, які визначаються за методикою, описаною в [7], функція $\rho(z;\varphi;r;t)$ визначає спосіб деформації перерізу:

$$\rho(z;\varphi;r;t)=F(z;\varphi;r;t;a_i), \qquad (17)$$

де $a_i$ – параметри нев'зок системи (7). В (12) введено розв'язок рівняння (8) та використано результат (10) для оцінювання полярних переміщень (за координатою $x_2=\varphi$), зумовлених дією обертового моменту $M$.

## 4. Чисельні розрахунки та аналіз результатів

У ході проведення практичних розрахунків розглядались наступні конфігурації функції $F(z;\varphi;r;t;a_i)$:

1. Еліптична конфігурація.

За допомогою $F(z;\varphi;r;t;a_i)$ моделювалась форма еліпса для перерізів трубопроводу, параметри еліпса (велика та мала півосі) вибирались таким чином, щоб мінімізувалась величина:

$$R^2=\sum_{i=1}^{2}R_i^2+\sum_{i=1}^{2}R_{ri}^2\to\min, \qquad (18)$$

де: $R_i$ – нев'язки першого та другого рівняння системи (7); $R_{ri}$ – нев'язки граничних умов (10)-(11).

2. Конфігурація перерізу одержана з використанням інтерполяційних кубічних сплайнів зі згладжуванням.

При цьому параметри оптимізації (18) виступали як параметри згладжування, що визначались з урахуванням точності вимірювальної апаратури.

3. Конфігурація перерізу, одержана з використанням методу найменших квадратів.

При цьому величина $R^2$ в (18) мінімізувалась шляхом вибору параметрів кривих, які задаються дво- та трипараметричними залежностями. Криві, що використовувались при моделюванні, повинні були бути випуклими та замкненими.

За розробленою моделлю процесу деформування перерізів трубопроводу за даними внутрішньотрубної інспекції створено розрахунковий алгоритм та програмний комплекс, за допомогою якого проведено тестові розрахунки модельних ділянок трубопроводів з різним характером деформування перерізів та осей, які виявили добре узгодження з результатами оцінки зміни НДС іншими методами. Проведемо розрахунки НДС та його зміни для реальних ділянок трубопроводів, що експлуатуються в лінійних виробничих управліннях магістральних газопроводів, що входять в структуру ДП "Прикарпаттрансгаз" та інших підприємств НАК "Нафтогаз України". Точність вимірювання напружень в абсолютній величині складає 10-15 МПа, що є задовільним результатом з точки зору практичних розрахунків.

### *Література*


1 Неразрушающий контроль и диагностика: справочник / [В.В. Клюев, Р.Ф. Сослин, А.В. Ковалев и др.; под ред. В.В. Клюева] – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 2003. – 656 с.

2 VIII Международная деловая встреча "Диагностика-98": сб. докладов (Сочи, апрель 1998г.). – Т.2: Диагностика линейной части магистральных трубопроводов. – М.: ИРЦ Газпром, 1998. – 392 с.

3 Айнбиндер А. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость / А.Б. Айнбиндер, А.Г. Каперштейн. – М.: Недра, 1982. – 341 с.

4 Бородавкин П.П. Трубопроводы в сложных условиях. – М.: Недра, 1968. – 346 с.

5 Бакаев В.В. Совершенствование технологий и диагностического оборудования компании РОЗЕН / В.В. Бакаев. – XI Международная деловая встреча "Диагностика-2001". Диагностика линейной части магистральных газопроводов. – М.: "ИРЦ Газпром", 2001. – Т.2. – Ч.1. – С.49-56.

6 Болгаченко Т.О. Проблеми і методи обробки та аналізу отриманих даних в задачах контролю технічного стану трубопроводів з використанням внутрішньотрубних дефектоскопів / Т.О.Болгаченко // Наукові вісті ІМЕ „Галицька академія". – 2007. – №1(11). – С. 144-147.

7 Заміховський Л.М. Математичний апарат для контролю напружено-деформованого стану трубопроводів при зміні їх просторового положення / Л.М. Заміховський, А.П. Олійник. – Івано-Франківськ: Факел, 2008. – 280 с.

8 Олійник А.П. Математичне моделювання процесу деформації осі трубопроводів з використанням інтерполяційних поліномів Ерміта / А.П. Олійник // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т. 8. – № 1. – С.98-102.

9 Седов Л.И. Механика сплошных сред / Л.И.Седов. – И.: Наука, 1984. – Т. 2. – 572 с.


*Стаття поступила в редакційну колегію*
*10.07.09*
*Рекомендована до друку професором*
***В. Я. Грудзом***