

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДУГОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМАХ ТРУБОПРОВОДІВ НА РЕМОНТНИХ ДІЛЯНКАХ

М.М.Семежен, З.П.Лютак

ІФНГУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 46077
e-mail: public@nung.edu.ua

На основани законів технічної механіки і фізики розповсюдження ультразвукової хвилі визначено напружено-деформоване стан дугового елемента трубопроводу на ремонтному участку. Показана залежність розподілу напружень в залежності від кулової координати дугового елемента. На основани виведених залежностей і отриманих результатів, зная розподілення напружень і їх екстремальні значення в сеченнях дугового участка трубопроводу, можна давати рекомендації по проведенню ремонтних робіт на даних участках в конкретних умовах, що склалися, при цьому забезпечив цілісність конструкції трубопроводу.

Дугові ділянки трубопроводів знаходяться в складному напруженому стані, піддаючись дії навантажень, які не завжди можна врахувати при проектуванні, так як вони проявляються лише в особливих ситуаціях, наприклад: при появі ділянок сповзаючого ґрунту на прокладеній трасі трубопроводу, ділянки просідання або розрідження ґрунту. В результаті міцнісні показники трубопроводу повинні забезпечувати його працездатність в експлуатаційних умовах. За наявності вище вказаних факторів, на трубопровод діють поперечні та поздовжні сили, які змінюють попереднє положення дугових елементів трубопроводу, що призводить до виникнення в матеріалі труб цих елементів додаткових зусиль, які можуть призвести до руйнування цієї ділянки. В нормативних документах на проектування магістральних трубопроводів максимальне напруження в кривих трубах і їх жорсткість приводяться без врахування граничних умов на торцях труб [1].

Виникає задача визначення напружено-деформованого стану дугових елементів трубопроводу з врахуванням умов, в яких знаходяться торці дугових елементів. Вирішення такої задачі для окремих випадків відомі [2, 3]. В роботі [2] розглянутий чистий згин циліндричної оболонки навантаженої згинаючими моментами на торцях та виведені залежності між параметром сплющування перерізів циліндричної оболонки під час пружного згину та кривизною її осі. У роботі [3] подані виведення розрахункових формул для визначення геометричних та навантажувальних характеристик, які дозволяють визначити напружено-деформований стан металу труби з криволінійною віссю, але при плоскому напруженому стані. Перелік приведених характеристик в цих задачах є недостат-

In this work on basis of technical mechanics laws and physical considerations on propagation of ultrasonic wave the mode of deformations of the arc element of the pipeline on repair bay is identified. Also the dependence of distribution of stresses that appear in the arc element of the pipeline by influence of external factors depending on their size and angular coordinate of arc elements is demonstrated. On basis of the dependences deduced and the results obtained, knowing the distribution of stresses and their extreme values in the defined sections of the arc part of pipeline, the advices could be given on carrying out of maintenance works at the parts in the concrete situations emerged, at the same time having ensured the integrity of pipeline construction.

нім, оскільки розв'язок даних задач ґрунтувався на методі виключення параметрів, які використовуються в окремих рішеннях при визначенні напружено-деформованого стану елементів трубопроводу, також в даних розв'язках не враховувалась просторова дія навантажень, які виникають при вище згаданих випадках.

Розглянемо ділянку заглибленого в ґрунт трубопроводу ABC з вибраною системою координат XYZ (рисунок 1), частина якої під час ремонтних робіт вже звільнена від ґрунту, що має місце при заміні ізоляційного покриття трубопроводу, заміні корозійних ділянок. Крім того, внаслідок експлуатації, трубопровід піддавався навантаженням, які призводять до згину його поздовжньої осі, внаслідок чого трубопровід на даній ділянці отримав викривлення своєї осі у вигляді дуги. Вважаємо, що дана дугова ділянка трубопроводу в перерізі B заземлена і ділянка AB знаходиться заглибленою в ґрунті також дугова ділянка BC навантажена в перерізі C силою P , яка перпендикулярна площині дуги та відповідно, паралельна осі Y .

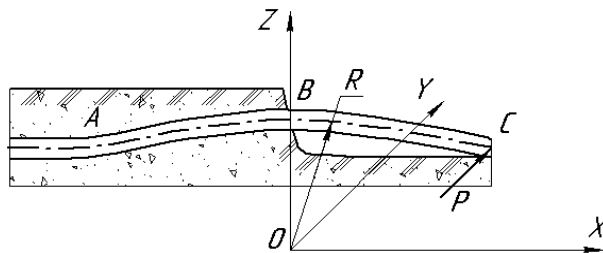


Рисунок 1 — Схема дугової ділянки трубопроводу

Для наочності під час вирішення даної задачі визначення напруженого стану дугової ділянки трубопроводу зобразимо ділянку трубопроводу BC у вигляді рисунка 2.

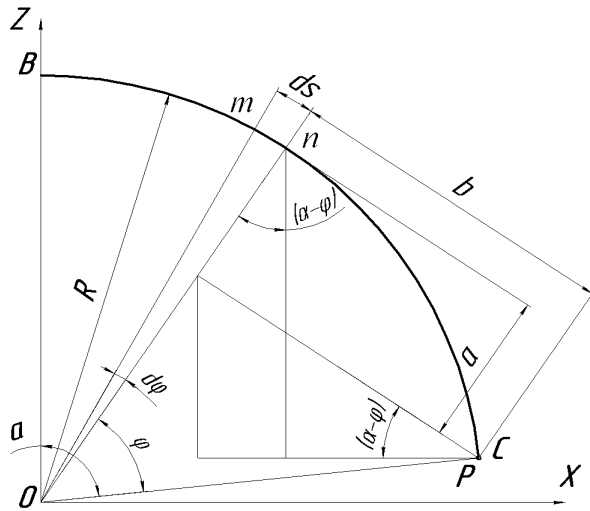


Рисунок 2 — Моменти, які діють в дуговій ділянці від сили P

На даному рисунку ділянка трубопроводу BC показана у вигляді дуги, що знаходиться у площині ZX , з радіусом кривизни дугової ділянки R та кутом дуги α . Вибираємо на даній ділянці трубопроводу елементарну дугу довжиною ds і позначимо її mn . Нехай положення перерізу в точці n визначається деяким кутом φ , тоді кут між радіусами проведеними в точках m та n буде $d\varphi$. Сила P в даному випадку перпендикулярна площині дуги і прикладена в точці C . Відстані від точки прикладання сили P до положення поперечного перерізу в точці n позначимо a та b .

Розглянемо напружено-деформований стан дугової ділянки трубопроводу BC . Від дії зовнішньої сили P в поперечних перерізах дугової ділянки трубопроводу BC відбувається деформація згину та кручення, внаслідок якої в поперечних перерізах трубопроводу виникають внутрішні силові фактори, а саме поперечна сила Q , згинаючий M_z та крутний $M_{кр}$ моменти. Дані силові фактори діють в двох площинах XY та YZ , оскільки в площині ZX проекція сили P на цю площину рівна 0. В защемленні можуть виникати реакція защемлення, яка протидіє зміщенню поперечного перерізу в точці B та реакція защемлення, яка виключає можливість його зміщення в напрямку осі X , а також реактивний момент, який протидіє повороту поперечного перерізу в точці B навколо осі X . Розглядаємо даний дуговий елемент трубопроводу BC , як балку кільцевого поперечного перерізу малої кривизни, вважаючи, що [4]

$$h < \frac{1}{4}R - \frac{1}{5}R, \quad (1)$$

де h – висота поперечного перерізу трубопроводу, під якою розуміється найбільший розмір поперечного перерізу в площині кривизни осі.

Тому величину напружень, які виникають в поперечних перерізах дугової ділянки трубопроводу з достатньою для практики точністю можна визначити аналогічно, як і для прямих балок [4].

З рисунка 2 для елементарної дуги ds , як відомо згинаючий момент M_z дорівнює

$$M_z = Pb = PR \sin \varphi. \quad (2)$$

Крутний момент $M_{кр}$ для даної ділянки згідно геометричних розмірів буде визначатись:

$$M_{кр} = Pa = PR(1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

Для розрахунку згинаючих та крутних моментів в площині XY розглянемо проекції цих моментів на площину XY , які дорівнюють:

$$\begin{aligned} M_{z(xy)} &= Pb \cos(\alpha - \varphi) = \\ &= PR \sin \varphi \cos(\alpha - \varphi); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_{кр(xy)} &= Pa \sin(\alpha - \varphi) = \\ &= PR(1 - \cos \varphi) \sin(\alpha - \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Для розрахунку згинаючих та крутних моментів в площині YZ розглянемо проекції цих моментів на площину YZ які дорівнюють:

$$\begin{aligned} M_{z(yz)} &= Pb \sin(\alpha - \varphi) = \\ &= PR \sin \varphi \sin(\alpha - \varphi); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} M_{кр(yz)} &= Pa \cos(\alpha - \varphi) = \\ &= PR(1 - \cos \varphi) \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Визначаємо сумарні напруження, використовуючи принцип незалежності дії сил [4], по якому необхідно визначити напруження від кожного компонента внутрішніх сил окремо, а потім їх просумувати. Від дії поперечних сил Q_{xy} та Q_{yz} а також крутних моментів $M_{кр(xy)}$ та $M_{кр(yz)}$ в точках поперечного перерізу дугової ділянки трубопроводу виникають дотичні напруження τ^l . На основі закону парності дотичних напружень вони виникають також і в поздовжніх перерізах та викликають зсуви окремих волокон одних відносно одних. Згинаючі моменти $M_{z(xy)}$ та $M_{z(yz)}$ викликають в точках поперечного перерізу дугової ділянки трубопроводу нормальні напруження стиску та розтягу поздовжніх волокон матеріалу відносно нейтральної осі перерізу.

Згідно із законами технічної механіки поперечні сили Q_{xy} та Q_{yx} знайдемо, як суму спроекованих всіх сил, які діють на даній ділянці трубопроводу відповідно на вісь Y у площині XY та YZ , тому:

$$Q_{xy} = Q_{yz} = P. \quad (8)$$

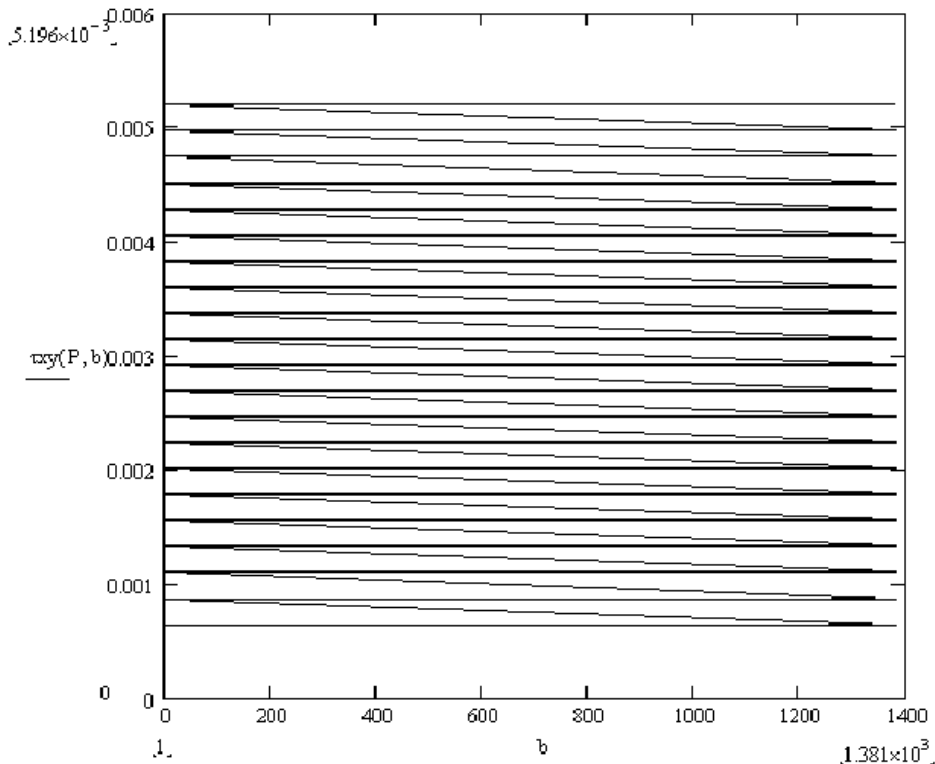


Рисунок 3 — Залежність дотичних напружень τ'_{xy} та τ'_{yz} від величини дії прикладеної сили P ($P=1000\text{Н}, 1350\text{Н}, \dots, 8000\text{Н}$) та ширини b ($b=1\text{ мм}, 70\text{ мм}, \dots, 1420\text{ мм}$) поперечного перерізу дугового елемента на тому рівні, на якому визначаються дотичні напруження

Таким чином, величини дотичних напружень τ'_{xy} та τ'_{yz} в поперечних перерізах даної дугової ділянки трубопроводу та в перерізах її площинами паралельними нейтральному шару визначаємо за формулою Журавського [4]

$$\tau' = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}, \quad (9)$$

де: S – статичний момент (відносно нейтральної осі) відсіченої частини поперечного перерізу розміщеної по одну сторону від рівня, на якому визначаються дотичні напруження,

I – момент інерції всього поперечного перерізу відносно нейтральної осі,

b – ширина поперечного перерізу дугового елемента на тому рівні, на якому визначаються дотичні напруження.

Підставляючи вираз (8) в (9), отримаємо:

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \frac{P \cdot S}{I \cdot b}. \quad (10)$$

Сумарні дотичні напруження від дії поперечних сил дорівнюють

$$\tau' = \sqrt{(\tau'_{xy})^2 + (\tau'_{yz})^2}. \quad (11)$$

Практичні розрахунки (рисунок 3) свідчать, що величина дотичних напружень τ' від дії поперечних сил не значна, порівняно з напруженнями які виникають від дії $M_{z\alpha}$ та M_{kr} , тому при подальших розрахунках величиною даних дотичних напружень можна нехтувати.

При згині в двох площинах нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу визначаються за формулою [4]:

в площині XY :

$$\sigma_x = \frac{M_{z(xy)}}{0,5W_\rho}, \quad (12)$$

в площині YZ :

$$\sigma_z = \frac{M_{z(yz)}}{0,5W_\rho}, \quad (13)$$

де W_ρ – полярний момент опору кільцевого поперечного перерізу дугового елемента.

$$W_\rho = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4), \quad (14)$$

де: D – зовнішній діаметр труби дугового елемента трубопроводу,

d – внутрішній діаметр труби дугового елемента трубопроводу.

Сумарні нормальні напруження дорівнюють

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_{z(xy)}^2 + M_{z(yz)}^2}}{0,5W_\rho}. \quad (15)$$

Дотичні напруження від дії крутного моменту в двох площинах XY та YZ сумуються геометрично. Дотичні напруження в площині XY від дії крутного моменту визначаємо за формулою [4]

$$\tau_{xy} = \frac{M_{kp(xy)}}{W_\rho}, \quad (16)$$

дотичні напруження в площині YZ від дії крутного моменту:

$$\tau_{yz} = \frac{M_{kp(yz)}}{W_\rho}. \quad (17)$$

Сумарні дотичні напруження від дії крутних моментів в площинах XY та YZ :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (18)$$

Розглянемо також напружений стан трубопроводу, який знаходиться ще й під дією внутрішнього тиску p окрім вище згаданих сил. Внутрішній тиск приводить до виникнення напружень, які діють в тангенційному напрямку, тобто кільцевих напружень σ_y .

Від внутрішнього тиску p в стінці металу труби виникає зусилля N [6]

$$N = \frac{pD_{\text{вн}}}{2}, \quad (19)$$

де $D_{\text{вн}}$ – внутрішній діаметр трубопроводу.

Враховуючи, що

$$N = \sigma_y \delta, \quad (20)$$

де δ – товщина стінки металу труби,

$$\sigma_y = \frac{pD_{\text{вн}}}{2\delta}. \quad (21)$$

Для оцінки міцності даного дугового елемента трубопроводу знайдемо розрахункове напруження використавши при цьому четверту теорію міцності, та порівняємо його з допустимим значенням напруження. За допустиме значення приймаємо допустиме значення напруження пластичності матеріалу трубопроводу [5], [7].

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \leq [\sigma], \quad (22)$$

де: σ_1, σ_2 та σ_3 – головні напруження;

$[\sigma]$ – допустиме напруження пластичності матеріалу трубопроводу.

Визначимо головні напруження σ_1, σ_2 та σ_3 . Як відомо у випадку об'ємного напруженого стану на гранях елементарного паралелепіпеда виділеного в околі деякої точки і орієнтованого довільним чином в загальному випадку тензор напружень матиме вигляд [5]:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (23)$$

а у розглядуваній моделі (рисунок 1) тензор напружень буде мати вигляд

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Використовуючи методику визначення головних напружень [5] визначник системи рівнянь рівноваги дії спроектованих всіх сил на осі X, Y, Z повинен бути рівний 0, тобто:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Визначивши визначник (25), прийдемо до кубічного рівняння такого вигляду:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (26)$$

де коефіцієнтами даного рівняння будуть:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz}.$$

У результаті розв'язку даного кубічного рівняння знайдені корені відповідатимуть значенням трьох головних напружень σ_1, σ_2 та σ_3 . Дані головні напруження згідно з теорією напруженого стану запишемо у вигляді

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (27)$$

На основі загальних фізичних міркувань можна стверджувати, що фізичним параметром, який відповідає величині фактичних напружень в досліджуваному металі є швидкість або час поширення ультразвукової хвилі. В напрямку кожної з координатних осей можуть розповсюджуватися три незалежні об'ємні хвилі – одна поздовжня і дві поперечні (зсувні) з різними швидкостями і взаємно ортогональними поляризаціями [8].

$$\delta V_{ik} = f(\sigma_{\text{ln}}), \quad (28)$$

де: δV_{ik} – відносна зміна швидкості розповсюдження ультразвукової хвилі;

σ_{ln} – напруження;

індекс i – характеризує напрям розповсюдження ультразвукової хвилі,

k – характеризує напрям поляризації ультразвукової хвилі.

$$\delta V_{ik} = \begin{cases} \frac{V_{ik} - V_{ik}^0}{V_l} = \frac{\Delta V_{ik}}{V_l}, i = k, V_{ik}^0 = V_l \\ \frac{V_{ik} - V_{ik}^0}{V_t} = \frac{\Delta V_{ik}}{V_t}, i \neq k, V_{ik}^0 = V_t \end{cases}, \quad (29)$$

де: V_{ik} – матриця швидкостей розповсюдження ультразвукової хвилі в напруженому середовищі;

V_{ik}^0 – матриця швидкостей розповсюдження ультразвукової хвилі в ненапруженому середовищі;

V_l – швидкість поздовжніх ультразвукових хвиль в ненапруженому середовищі;

V_l – швидкість поперечних ультразвукових хвиль в ненапруженому середовищі.

Рівняння (28) у диференціальній формі:

$$d(\delta V_{ik}) = \left(\frac{\partial \delta V_{ik}}{\partial \sigma_{ln}} \right) d\sigma_{ln}. \quad (30)$$

Введемо позначення, для матриці 4-го рангу ізотермічних лінійних акустопружних коефіцієнтів швидкості [8]:

$$\left(\frac{\partial \delta V_{ik}}{\partial \sigma_{ln}} \right) = \beta_{ikln}. \quad (31)$$

Використовуючи рівняння (31) запишемо рівняння (30) у вигляді

$$d(\delta V_{ik}) = \beta_{ikln} d\sigma_{ln}. \quad (32)$$

Припустивши компоненти матриці (31) постійними для даного середовища, проінтегруємо (32) в лінійному наближенні:

$$\delta V_{ik} = \beta_{ikln} (\sigma_{ln} - \sigma_{ln}^0), \quad (33)$$

де σ_{ln}^0 – тензор початкових напружень.

Аналогічний вираз можна записати для відносної зміни часу розповсюдження хвилі:

$$\delta \tau_{ik} = \alpha_{ikln} (\sigma_{ln} - \sigma_{ln}^0), \quad (34)$$

де

$$-\left(\frac{\partial \delta V_{ik}}{\partial \sigma_{ln}} \right) = \alpha_{ikln}. \quad (35)$$

Задача заключається у визначенні компонент матриць акустопружних коефіцієнтів швидкості β_{ikln} .

Зобразимо матрицю акустопружних коефіцієнтів схематично таким чином:

$$\beta_{ikln} = \begin{pmatrix} L_n & T_n \\ L_l & T_l \end{pmatrix}, \quad (36)$$

де її частини вміщують відповідно:

L_n – 9 елементів, які характеризують вплив нормальних напружень на швидкість поздовжніх хвиль ($i = k, l = n$),

T_n – 18 елементів, які характеризують вплив нормальних напружень на швидкості поперечних (зсувних) хвиль ($i \neq k, l = n$),

L_l – 18 елементів, які характеризують вплив зсувних напружень на швидкість поздовжніх хвиль ($i = k, l \neq n$),

T_l – 36 елементів, які характеризують вплив зсувних напружень на швидкість поперечних (зсувних) хвиль ($i \neq k, l \neq n$).

Таким чином, матриця β_{ikln} вміщує 81 елемент, і є симетричною по індексам l та n , та не симетричною по індексам i та k .

На рисунках 4, 5, 6, 7 зображені залежності напружень, які виникають на розглядуваній ділянці трубопроводу, який знаходиться під дією внутрішнього тиску p та сили P . Кіль-

кість ліній на графіках вказує на вибір різних початкових значень сили P , при побудові графіків залежності напружень від прикладеної сили та кутової координати φ дугової ділянки трубопроводу. Як видно з побудованих графіків найбільш небезпечними напруженнями в стінках дугової ділянки трубопроводу є нормальні напруження σ_x , які виникають при згині в площині ХУ для даної ділянки трубопроводу в защемленні. Нормальні напруження σ_z , які виникають при згині даної ділянки трубопроводу в площині YZ набувають свого максимального значення при кутовій координаті рівній $\varphi = 10^\circ$. Дотичні напруження τ_{xy} та τ_{yz} від дії крутного моменту в площинах відповідно ХУ та YZ дещо менші, при цьому максимального свого значення дотичні напруження τ_{yz} досягають також в защемленні, а дотичні напруження τ_{xy} при значенні кутової координати $\varphi = 12,5^\circ$.

Для проведення розрахунків використовувались початкові дані $P = 1000\text{Н}, 1350\text{Н}, \dots, 8000\text{Н}$; $R = 115\text{м}$; $\varphi = 0,1^\circ, \dots, 20^\circ$; $D = 1,420\text{м}$; $\delta = 0,2\text{м}$; $p = 6 \cdot 10^6\text{Па}$; $\alpha = 20^\circ$.

Корені кубічного рівняння (26) σ_1, σ_2 та σ_3 , враховуючи (27), обчислені за допомогою програми MathCAD 11 (рисунок 8).

Визначивши напружено-деформований стан дугового елемента трубопроводу на ремонтній ділянці, знаючи розподіл напружень та їх екстремальні значення в певних перерізах дугової ділянки трубопроводу, можна давати рекомендації щодо проведення ремонтних робіт на даних ділянках в конкретних умовах, що склалися, при цьому забезпечивши цілісність конструкції трубопроводу.

Література

- 1 СНИП П-45-75.
- 2 Черний В.П. Сплющивание сечений цилиндрической оболочки при изгибе // Исследование надежности магистральных трубопроводов: Сб. науч. тр. – 1985. – С. 48-53.
- 3 Скоморовский Я.З., Сумароков В.С. Определение геометрических и нагрузочных параметров характерного участка изогнутого трубопровода // Исследование прочности магистральных трубопроводов: Сб. науч. тр. – 1984. – С. 123-130.
- 4 Дарков А.В., Шпиро Г.С. Соппротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1969.
- 5 Смирнов А.Ф., Александров А.В. Соппротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1969.
- 6 Бородавки П.П. Прочность магистральных трубопроводов. – М.: Недра, 1984.

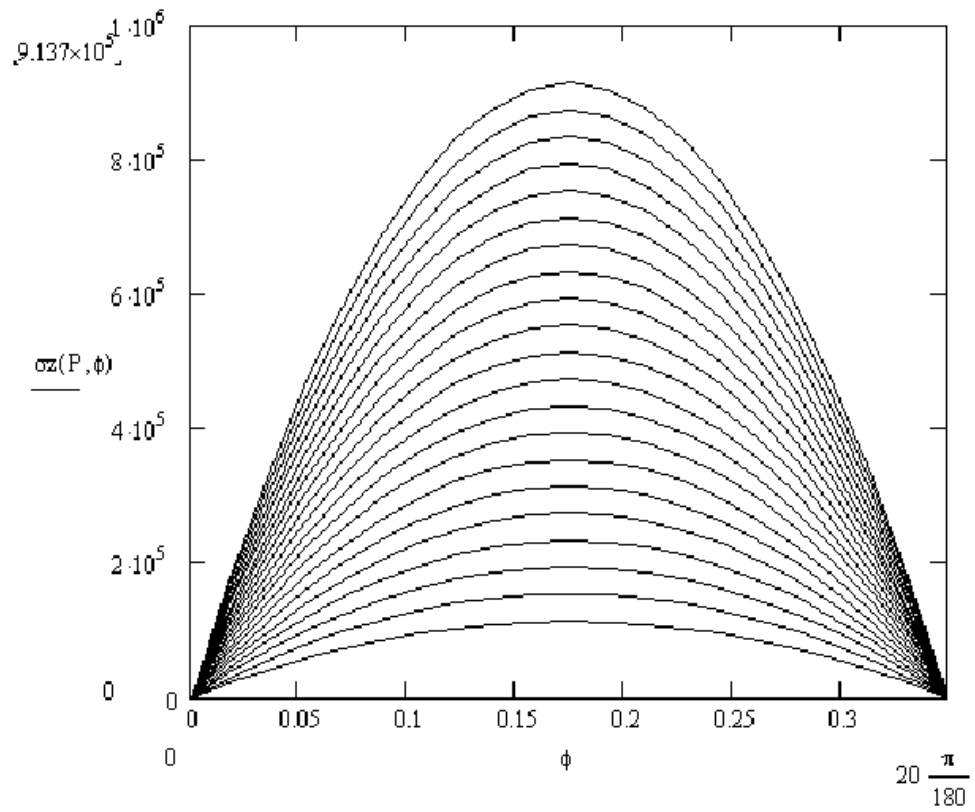


Рисунок 4 — Залежність нормальних напружень σ_z , Па від величини дії прикладеної сили P та кута φ

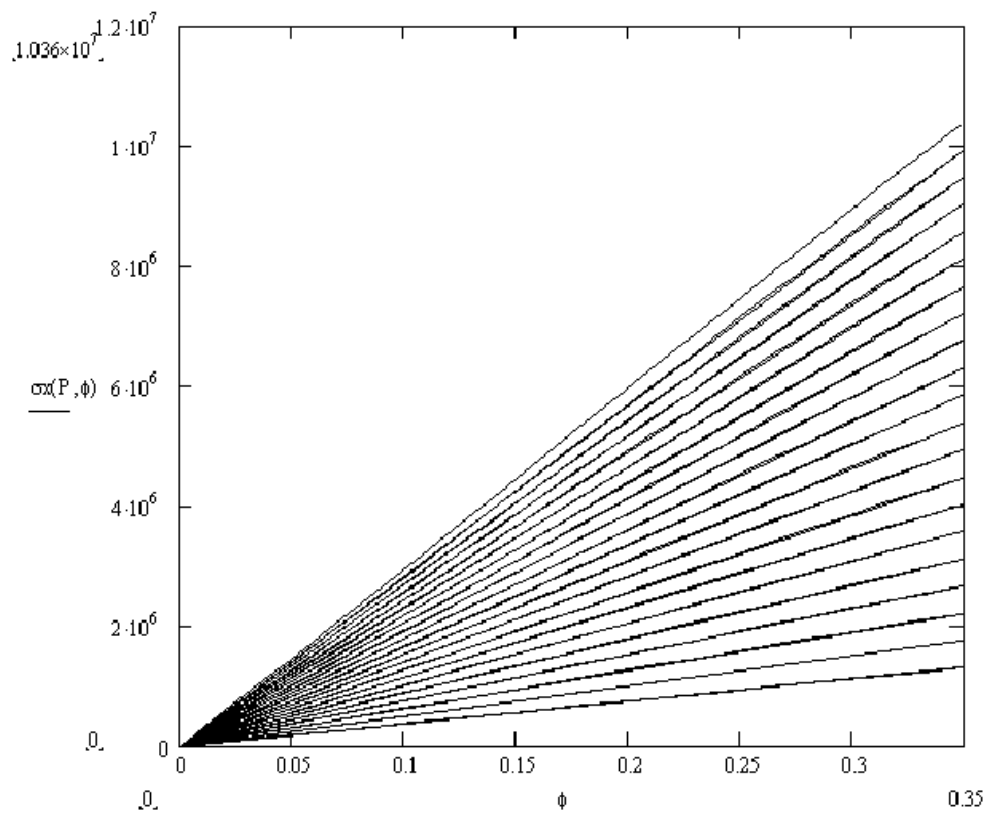


Рисунок 5 – Залежність нормальних напружень σ_x , Па від величини дії прикладеної сили P та кута φ

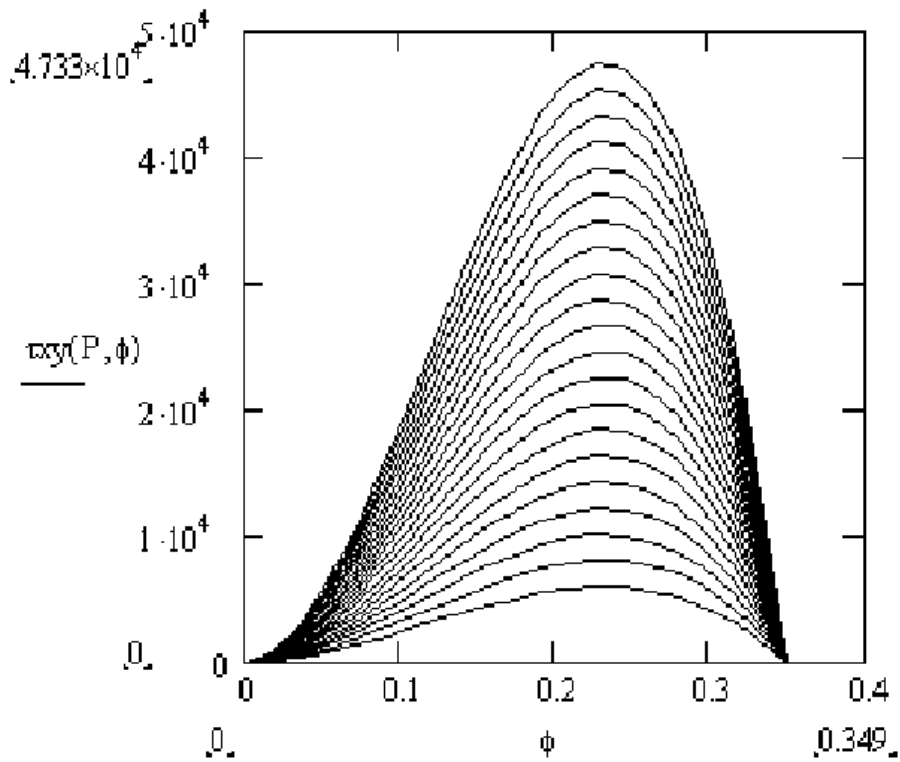


Рисунок 6 – Залежність дотичних напружень τ_{xy} , Па від величини дії прикладеної сили P та кута ϕ

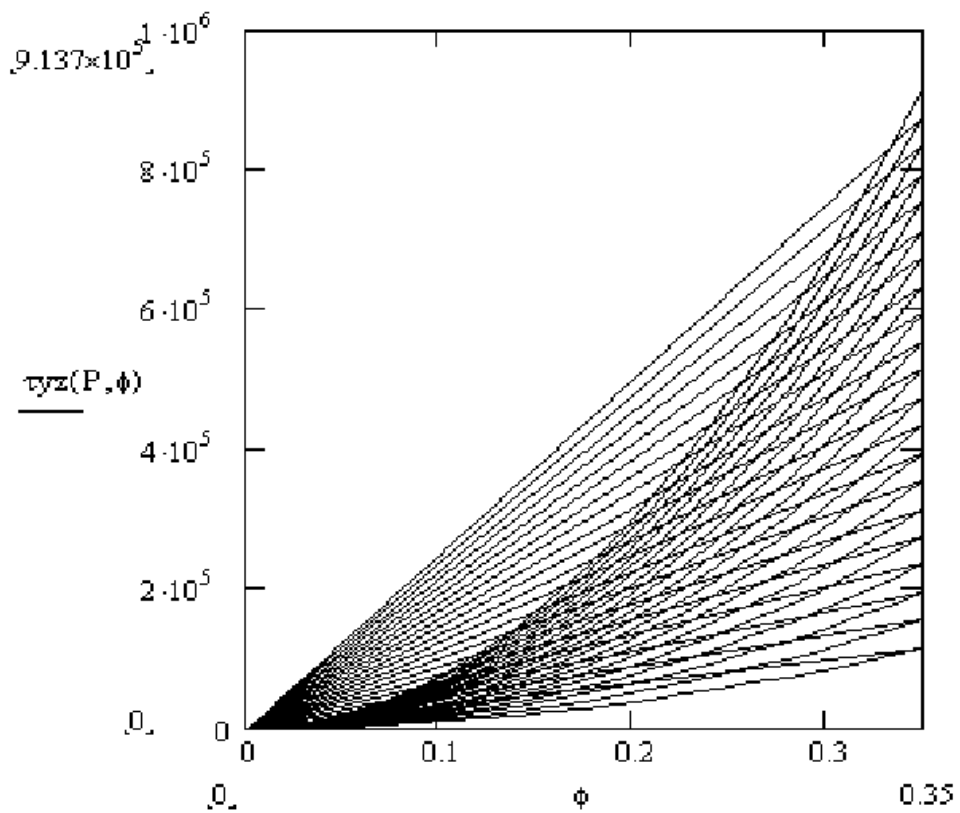


Рисунок 7 – Залежність дотичних напружень τ_{yz} , Па від величини дії прикладеної сили P та кута ϕ

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = & [1/6 * (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - \\
& - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + \\
& + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} - 6 * (1/3 * I2 - 1/9 * I1^2) / \\
& / (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - \\
& - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + 1/3 * I1], \\
\sigma_2 = & [-1/12 * (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - \\
& - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + \\
& + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + 3 * (1/3 * I2 - 1/9 * I1^2) / \\
& / (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - \\
& - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + \\
& + 1/3 * I1 + 1/2 * I^3^{1/2} * (1/6 * (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + \\
& + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + \\
& + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + 6 * (1/3 * I2 - 1/9 * I1^2) / (-36 * I1 * I2 + \\
& + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - \\
& - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3}]], \\
\sigma_3 = & [-1/12 * (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + \\
& + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + \\
& + 81 * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + \\
& + 3 * (1/3 * I2 - 1/9 * I1^2) / (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + \\
& + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + \\
& + 81 * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + 1/3 * I1 - 1/2 * I^3 \\
& * 3^{1/2} * (1/6 * (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + \\
& + 12 * (12 * I2^3 - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * \\
& * I3^2 + 12 * I3 * I1^3)^{1/2})^{1/3} + 6 * (1/3 * I2 - 1/9 * \\
& * I1^2) / (-36 * I1 * I2 + 108 * I3 + 8 * I1^3 + 12 * (12 * I2^3 - \\
& - 3 * I2^2 * I1^2 - 54 * I1 * I2 * I3 + 81 * I3^2 + 12 * I3 * \\
& * I1^3)^{1/2})^{1/3}]]
\end{aligned}$$

Рисунок 8 — Корені кубічного рівняння, обчислені за допомогою програми MathCAD 11

7 Лютак З.П., Семененко М.М. Векторне визначення напружень ремонтних ділянок магістральних газопроводів // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції „Ресурсозберігаючі технології в нафтогазовій енергетиці” „ІФНТУНГ-40”, 16-20 квітня 2007 р. – Івано-Франківськ (Україна). – Е.23.

8 Бобренко В.М., Вангели М.С. Акустическая тензометрия. – Кишинев: Штиинца, 1991.