УДК 622.24.05-004.4

НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ УЛЬТРАЗВУКОВИХ СПРЯМОВАНИХ ХВИЛЬ У СТІНЦІ МАГІСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДУ

А.А. Мандра, І.З. Лютак, З.П. Лютак

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15, e-mail: p u b l i c @ n u n g . e d u . u a

Удосконалено двовимірний напіваналітичний метод скінченних елементів з метою проведення аналізу поширення ультразвукових спрямованих хвиль у стінці магістральних трубопроводів в напрямку твірної труби. Представлено математичну модель, що базується на модальному підході опису коливань пружного середовища. Математичну модель представлено у вигляді характеристичного рівняння, яке обчислюється методом скінченних елементів. Подаються результати розрахунку та розподіл поля зміщень окремих мод. Для порівняння результатів розрахунку використано дисперсні криві хвильового числа мод Лемба та довжини хвилі, розраховані на основі відомих рівнянь. Із проведеного аналізу досліджень встановлено, що методи напіваналітичного розрахунку параметрів поширення акустичних спрямованих хвиль мають такі обмеження, як ресурсоємність, складність алгоритмів та інтерпретації результатів. Запропонований метод дозволяє проводити аналіз поширення спрямованої хвилі в тривимірному просторі шляхом аналізу поперечного перерізу хвилеводу, що значно зменшує час проведення обчислень. В результаті проведення обчислень виявлено: а) при застосуванні періодичних граничних умов можна зменшувати кількість скінченних елементів, що моделює поперечний переріз хвилеводу, до кількох елементів без втрати точності обчислень; б) зі зменшенням розміру скінченного елемента точність пошуку коренів задачі власних значень зростає, проте початок їх пошуку зміщується до більших значень хвильового числа. Введене поняття критерій практичної придатності моди дозволяє спростити аналіз результатів розрахунку параметрів поширення мод спрямованих хвиль.

Ключові слова: вектор зміщень, хвилевід, критерій хвильового поля, власні значення, тензор жорсткості, ступінь збуджуваності моди

Усовершенствован двухмерный полуаналитический метод конечных элементов с целью проведения анализа распространения ультразвуковых направленных волн в стенке магистральных трубопроводов вдоль образующей трубы. Представлена математическая модель, базирующаяся на модальном подходе описания колебаний упругой среды. Математическая модель представлена в виде характеристического уравнения, которое вычисляется методом конечных элементов. Представлены результаты расчета и распределение поля смещений отдельных мод. Для сравнения результатов расчета использованы дисперсные кривые волнового числа мод Лэмба и длины волны, рассчитанные на основе известных уравнений. Из проведенного анализа исследований установлено, что методы полуаналитического расчета параметров распространения акустических направленных волн имеют такие ограничения, как ресурсоемкость, сложность алгоритмов и интерпретации результатов. Предложенный метод позволяет проводить анализ распространения направленной волны в трехмерном пространстве путем анализа поперечного сечения волновода, что значительно сокращает время расчета. В результате проведения вычислений выявлено: а) при применении периодических граничных условий можно уменьшать количество конечных элементов, моделирующих поперечное сечение волновода, до нескольких элементов без потери точности вычислений б) с уменьшением размера конечного элемента точность поиска корней задачи собственных значений возрастает, однако начало их поиска смещается к большим значениям волнового числа. Введено понятие критерий практической пригодности моды позволяет упростить анализ результатов расчета параметров распространения мод направленных волн.

Ключевые слова: вектор смещений, волновод, критерий волнового поля, собственные значения, тензор жесткости, степень возбудимости моды

Two-dimensional semi-analytical method of finite elements has been improved which is aimed at the possibility of conducting the analysis of guided ultrasonic waves propagation within the wall of the main pipelines in the direction of generating tube. The mathematical model based on a modal approach describing the vibrations of an elastic medium. The mathematical model was presented in the form of the characteristic equation which is calculated by the finite element method. The results of calculation and distribution of displacement field of individual modes was presented. To compare the results of the calculation the dispersion curves of wavenumber and wavelength of Lamb modes were presented, that had been computed on the base on the well-known equations. As follows from the conducted analysis of the research it was determined that the methods of semi-analytical calculations of the acoustic guided waves parameters have such restrictions as long time of computation, complexity of algorithms and interpretation of results. The proposed method can analyse the distribution of guided waves in three-dimensional space by analysing the cross-section of the waveguide, which significantly reduces the computer resources for calculation. As a result of calculations it has been revealed that: a) the application of periodic boundary conditions can reduce the number of finite elements simulating the wavelength cross-section to some elements without loosing the accuracy of calculations, b) with decreasing the size of the finite element the accuracy of problem in order to find the roots of the eigenvalues increases, however the beginning their search is shifted to larger values of wave number. Introduced notion of a criterion of mode practical usefulness simplifies the results analysis of parameters calculation for guided waves modes propagation.

Key words: vector displacement, waveguide, the wave field criterion, eigenvalues, tensor rigidity, degree excitability of mode

Вступ

Застосування ультразвукових спрямованих хвиль (УСХ) для неруйнівного контролю набуває все більшого поширення. Основною причиною такого зацікавлення науковців дослідженнями УСХ є властивість останніх поширюватись на значно більші відстані, ніж поширюються об'ємні хвилі та давати значний луноімпульс при взаємодії з дефектами. Важливим є також і те, що чутливість УСХ при взаємодії з дефектами є практично однаковою, не залежить від розміщення його по товщині стінки труби, оскільки хвильове збурення від спрямованої хвилі покриває всю товщині середовища поширення.

На даний час відомо декілька математичних моделей, що описують поширення УСХ в пружному середовищі [1]. Для найбільш простих форм хвилеводу (пластина, циліндр) із однорідними чи композитними властивостями хвилеводу та ізотропними властивостями пружного середовища застосовуються числові методи розв'язання трансцендентних рівнянь [2, 3]. Алгоритм розв'язання таких рівнянь має недоліки, пов'язані із тим, що відношення амплітуд об'ємних хвиль при певному куті їх поширення є великим, і має місце вихід значень чисел за максимально допустимий діапазон (степінь чисел перевищує 200), в результаті чого алгоритм завершує пошук коренів [4]. Більш загальні рівняння опису поширення УСХ можна отримати шляхом математичного опису процесу суперпозиції об'ємних хвиль (поздовжньої та поперечної), наприклад, метод передавальних матриць або метод матриць імпедансу поверхні [5, 6, 7]. Ці методи орієнтовані на багатошарові середовища із в'язкопружними та анізотропними властивостями, проте недоліками їх є недосконалі процедури пошуку кореня в комплексній площині, які можуть пропускати окремі розв'язки [1]. Другим недоліком вказаних методів є складність дослідження поширення УСХ у хвилеводах із складною формою. Для вирішення вказаних недоліків було розроблено новий напіваналітичний метод скінченних елементів (НАМСЕ) [8]. Цей метод використовує існуючі алгоритми пошуку власних значень, які реалізовані в переважній більшості існуючих програмних пакетів скінченно-елементного аналізу, для модальних розрахунків. Головною перевагою НАМСЕ є те, що для нього необхідно аналізувати тільки переріз хвилеводу (площину, перпендикулярну напрямку поширення спрямованих хвиль). Це дозволяє значно зменшити кількість скінченних елементів у порівнянні із розбиттям повного об'єму хвилеводу цими елементами. Як результат застосування алгоритмів модального аналізу необхідно задати умову, що хвилі є гармонічними. Розвиток НАМСЕ відбувався останні три десятиліття. За цей час було виокремлено два основні напрямки досліджень. Першим напрямком є дослідження пластин з однаковою товщиною. При цьому НАМСЕ використовував одновимірні скінченні елементи, розміщені нормально до товщини хвилеводу. Точність розрахунку хвильового поля (переміщень та напружень) залежить від кількості елементів. Одним із перших досліджень цим методом був аналіз переміщень у багатошаровому хвилеводі [8]. Характеристичним рівнянням опису поширення УСХ було модальне рівняння в частотній області. Пізніші дослідження довели можливість пошуку комплексних хвильових чисел для дисперсних кривих УСХ із застосуванням модального підходу [9]. Подібні дослідження були здійснені для побудови дисперсних рівнянь для поширення УСХ в анізотропних шаруватих матеріалах і базувалась на рівняннях деформацій у площині [10]. Дослідження поширення УСХ в шаруватих круглих циліндричних оболонках при фіксованому напрямку поширення хвиль було здійснено також для одновимірних скінченних елементів [11]. В цій роботі було використано повне поле деформацій для циліндра і характеристичне рівняння було побудоване для одновимірного випадку. Також для дослідження відбиття УСХ від границь розділу середовищ було використано цей метод при фіксованих значеннях хвильового числа і вирішенням характеристичного рівняння у частотному діапазоні [12]. Було визначено критерії збіжності результатів обчислень. Поширення УСХ та загасання амплітуди було також здійснено для шаруватих хвилеводів з використанням одновимірних скінченних елементів [13]. Другим напрямком є дослідження хвилеводів із довільною формою поперечного перерізу [1]. Цей напрямок відомий як двовимірний НАМСЕ. В цьому методі аналізується поперечний переріз хвилеводу, який є перпендикулярним до напрямку поширення УСХ. Вперше цей метод було запропоновано для хвилеводів трикутної форми [14]. Використання скінченних елементів у двовимірному просторі для аналізу поширення УСХу хвилеводах із пружного матеріалу тонкостінної форми та рейок залізниці, пластин, стрижнів [15-20]. В кожному цьому дослідженні скінченні елементи на площині використовувалися для опису поля зміщень в тривимірному просторі хвиль, що поширювались нормально до площини. Моделювання поширення УСХ у хвилеводі двовимірним НАМСЕ, причому його форма вважалася нескінченно широкою, запропоновано в праці [1]. Результати розрахунку цим методом можна прирівнювати до відомих методів, що базуються на застосуванні числового розв'язку трансцендентних рівнянь. Недоліком методу є те, що його областю застосування є тонкостінні хвилеводи. Іншим типом дослідження двовимірного НАМСЕ є моделювання хвилеводу як періодичної структури із періодом довжиною в один скінченний елемент із періодичними граничними умовами [21]. Цей метод може застосовуватись для хвилеводів будь-якої форми поперечного перерізу та форми твірної хвилеводу. Для шаруватих та композитних матеріалів хвилеводу дисперсні рівняння були обчислені спеціальними скінченними елементами [22, 23]. Застосування двовимірного НАМСЕ для труб було модифіковано таким чином, щоб зменшити кількість

скінченних елементів [24, 25, 26]. В цьому підході запропоновано спосіб моделювання поперечного перерізу хвилеводу круглої форми як періодичної структури в площині перерізу з використанням циклічної симетрії, що реалізована в більшості пакетів скінченних елементів. Обмеженням для застосування методу є те, що він може описувати дисперсні властивості тільки кільцевих спрямованих хвиль, які поширюються по периметру труби.

Із представленого аналізу можна побачити, що НАМСЕ можна застосовувати для аналізу поширення УСХ в пружних хвилеводах, зокрема стінках трубопроводів. Проте в даних дослідженнях відсутні моделі, які стосуються магістральних трубопроводів великих діаметрів та товщин стінок, що дорівнюють кільком довжинам хвиль. Обмеженнями існуючих методів є нестабільність алгоритмів при великих значеннях відношення амплітуд об'ємних хвиль, що утворюють спрямовану хвилю. Метою даного дослідження є удосконалення двовимірного НАМСЕ для можливості проведення аналізу поширення УСХ в стінці магістральних трубопроводів у напрямку твірної труби.

Математична модель поширення ультразвукових спрямованих хвиль побудована на основі двовимірного напіваналітичного методу скінченних елементів

Для опису поля переміщень елементарного об'єму пружного середовища хвилеводу із однаковою товщиною від збурення УСХ найбільш зручним підходом є опис поля деформацій [8]. Такий підхід можна також застосовувати і для горизонтально-поляризованих спрямованих хвиль [1]. Для опису поширення УСХ розглянемо тривимірний простір (рис. 1).

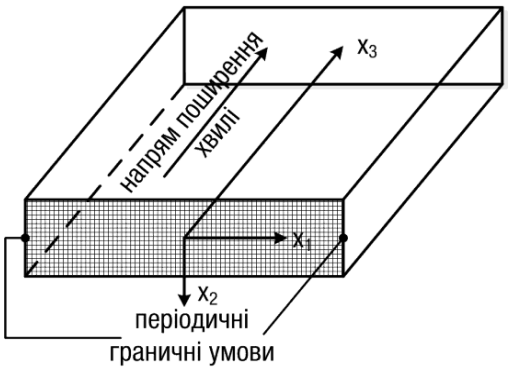


Рисунок1 – Схема розрахунку поперечного перерізу стінки труби

Оскільки УСХ поширюється в напрямку осі Ox_3, то поле зміщень пружного середовища від гармонічних коливань хвилі буде таким [1]:

$$u_r(x_1,x_2,x_3,t)=U_r(x_1,x_2)e^{i\cdot(kx_3-\omega\cdot t)}\ , \quad (1)$$

де x_1, x_2, x_3 – декартові координати;

t – час;

u_r – компоненти вектора поля зміщень елементарного об'єму пружного середовища;

U_r – амплітуда зміщень елементарного об'єму пружного середовища від гармонічних коливань УСХ;

k – хвильове число;

ω – частота;

r – індекс, який приймає значення 1, 2, 3;

i – позначення уявної частини комплексного числа.

Аналіз поширення УСХ здійснюється у площині Ox_1Ox_2. Градієнти поля зміщень елементарного об'єму будуть такими [1]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_1}=\frac{\partial U_r}{\partial x_1}e^{i\cdot(kx_3-\omega\cdot t)},$$
$$\frac{\partial u_r}{\partial x_2}=\frac{\partial U_r}{\partial x_2}e^{i\cdot(kx_3-\omega\cdot t)}, \quad (2)$$
$$\frac{\partial u_r}{\partial x_3}=ik\frac{\partial U_r}{\partial x_3}e^{i\cdot(kx_3-\omega\cdot t)}.$$

Рівняння Ейлера для математичного опису коливань елементарного об'єму пружного середовища, записаного на основі базових законів механіки щодо збереження маси та моменту, буде таким [25]:

$$\frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r}=\rho\cdot\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\ , r,k=1,2,3\ , \quad (3)$$

де T_{rk} – компоненти тензору напружень;

ρ – густина;

t – час.

Закон Гука, записаний у тензорній формі, матиме такий вигляд [27]:

$$T_{rk}=C_{rkjl}S_{jl}\ , \quad (4)$$

де C_{rkjl} – компоненти тензору жорсткості четвертого порядку;

S_{jl} – компоненти тензору деформацій.

Рівняння руху в пружному середовищі, записане в диференційному виглядів частотній області з врахуванням (3) та (4), буде таким:

$$C_{rkjl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_l}+\rho\omega^2 u_r=0\ ,\ r,k,j,l=1,2,3\ . \quad (5)$$

Властивості тензора жорсткості можна визначити із рівнянь закону Гука, записаного у тензорній формі [27]:

$$T_{rk}=\frac{F_r}{A_k}\ ,\ S_{jl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right), \quad (6)$$

де F_r – компоненти вектору сили, що прикладена до площини A_k.

Тензор деформацій можна записати в іншій формі [1]:

$$S_{jl}=\frac{\partial u_j}{\partial x_l}n_k\ , \quad (7)$$

де n_k – компоненти вектора **n**,

n – вектор нормалі до площини A_k.

За своїм визначенням тензор деформацій **S** є симетричним, що означає, що в нього замість дев'яти незалежних компонентів є тільки шість, три діагональні та три недіагональні [27]. Симетрія тензору також означає, що можна в будь-якій точці простору підібрати таку систему координат, де б цей тензор має тільки три ненульові діагональні компоненти. Це означає, що такий тензор описуватиме тільки розтяг–

стиск в напрямку координатних осей. Тензор, що складається тільки із діагональних елементів, має таку властивість, що сума його елементів (функція trace (**S**) = $S_{11} + S_{22} + S_{33}$) є інваріантом від зміни системи координат.

Розглянемо властивості тензору напружень **T** на прикладі елементарного об'єму пружного середовища, на яке падає ультразвукова хвиля. В цьому випадку на поверхні уявного куба утворюються напруження, пропорційні зусиллям до площі поверхні грані. Такі зусилля повинні бути скомпенсованими, оскільки в іншому випадку розглядуваний об'єм пружного середовища отримував би прискорення. Скомпенсовані зусилля виникають на протилежній грані розглядуваного об'єму пружного середовища. Це означає, що тензор деформацій є симетричним із шістьма незалежними компонентами.

Властивості симетрії тензорів деформацій та напружень зумовлюють таку симетрію тензору жорсткості [27]:

$$C_{rkjl} = C_{krjl} = C_{rklj} = C_{krlj} = C_{jlrk} \ . \qquad (8)$$

Перепишемо (5) у такий спосіб:

$$C_{rkjl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + C_{r3jl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3 \partial x_l} + C_{rkj3}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_3} + C_{r3j3}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3 \partial x_3} + \rho\omega^2 u_r = 0 \ , \qquad (9)$$

$$r, j = 1,2,3 \ , \ k,l = 1,2 \ .$$

На основі (2) та (8) рівняння (9) запишемо у такій формі [1]:

$$C_{rkjl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + i\left(C_{r3jk} + C_{rkj3}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + kC_{r3j3}\left(ku_j\right) + \rho\omega^2\delta_{rj}u_j = 0 \ , \qquad (10)$$

$$r, j = 1,2,3 \ , \ k,l = 1,2 \ ,$$

де $\delta_{rj} = \begin{cases} 1, r = j \\ 0, r \neq j \end{cases}$ – функція Кронекера.

На основі (2), (6) та (7) запишемо напруження на гранях елементарного об'єму пружного середовища [1]:

$$T_{rk} = C_{rkjl}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}n_k \ , \ \forall r,k,j,l = 1,2,3 \ ,$$

$$T_{rk} = C_{rkjl}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}n_k + iC_{rkj3}\left(ku_j\right)n_k \ , \qquad (11)$$

$$\forall r, j = 1,2,3; \ k,l = 1,2 \ .$$

У пакеті програмного забезпечення, що реалізує метод скінченних елементів, задача пошуку власних значень записується у такій формі [28]:

$$\lambda^2\mathbf{e_a}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{d_a}\mathbf{u} + \nabla\cdot\left(-\mathbf{C}\nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} + \boldsymbol{\gamma}\right) + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{u} = \mathbf{F} \ ,$$

$$\nabla\mathbf{u} = grad(\mathbf{u}), \ \nabla\cdot\mathbf{u} = div(\mathbf{u}), \qquad (12)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{C}\nabla\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n}\right) \ ,$$

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\mathbf{u} = \beta_1\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} + ... + \beta_n\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_n} \ ,$$

де $\mathbf{e_a}$ – маса пружного середовища;

$\mathbf{d_a}$ – матриця демпфувальних коефіцієнтів;

$\boldsymbol{\alpha}$ – матриця конвективного консервативного потоку;

$\boldsymbol{\gamma}$ – джерело консервативного потоку;

$\boldsymbol{\beta}$ – матриця конвективних коефіцієнтів;

a – матриця адсорбування;

λ – власні значення.

Прирівняємо до нуля $\mathbf{e_a}$,**F** та $\boldsymbol{\gamma}$. За відсутності доданка із $\mathbf{e_a}$ матриця $\mathbf{d_a}$ відіграватиме роль матриці маси. Рівняння (12) можна записати у такій формі:

$$\lambda\mathbf{d_a}\mathbf{u} + \nabla\cdot\left(-\mathbf{C}\nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\right) + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{u} = 0 \ . \qquad (13)$$

Рівняння (13) можна подати у формі тензорів відповідно до (10) так [1]:

$$C_{rkjl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + i\left(\alpha_{rjk} - \beta_{rjk}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - a_j u_j + \lambda d_{rj}u_j = 0 \ . \qquad (14)$$

В пакеті скінченних елементів загальна форма граничних умов Неймана є такою [28]:

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}\right) + \mathbf{q}\mathbf{u} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}, \qquad (15)$$

де **q** – матриця адсорбування;

g – вектор джерела збурень;

$\boldsymbol{\mu}$ – вектор Лагранжевих множників;

n – вектор нормалі до границь розділу досліджуваного об'єкта.

Матриця адсорбування **q** та вектор джерела збурень **g** є визначеними тільки на границях досліджуваного об'єкту.

Прирівняємо до нуля такі компоненти (15), як **g**, $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\gamma}$. Таким чином, (15) можна подати у формі [1]

$$C_{rkjl}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}n_k + \alpha_{rjk}u_j n_k + q_{rj}u_j = 0 \ . \qquad (16)$$

Задача пошуку власних значень (10) є квадратним рівнянням. Для його лінеаризації необхідно ввести вектор **V** такий, щоб [1]:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{V} = k\mathbf{M}\times\mathbf{U} \ , \qquad (17)$$

де **M** – довільна діагональна квадратна матриця;

k – власні значення.

Рівняння (17) можна записати (10) у формі (14) та (16). Для цього необхідно визначити компоненти вектору зміщень пружного середовища [1]:

$$\mathbf{u} = \left\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\right\}^T \ . \qquad (18)$$

Члени рівняння (13) матимуть такий вигляд [1]:

$$\mathbf{d_a}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{D}\\ \mathbf{M} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix}\mathbf{C^c} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & i\mathbf{A}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -i\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}\end{pmatrix}, \quad (19)$$

де нуль – нульові матриці відповідного розміру,

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-C_{55} & -C_{54} & -C_{53}\\ -C_{45} & -C_{44} & -C_{43}\\ -C_{35} & -C_{34} & -C_{33}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-\rho\omega^2 & 0 & 0\\ 0 & -\rho\omega^2 & 0\\ 0 & 0 & -\rho\omega^2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C^c}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{16} & C_{16} & C_{12} & C_{15} & C_{14}\\ C_{61} & C_{66} & C_{66} & C_{62} & C_{65} & C_{64}\\ C_{61} & C_{66} & C_{66} & C_{62} & C_{65} & C_{64}\\ C_{21} & C_{26} & C_{26} & C_{22} & C_{25} & C_{24}\\ C_{51} & C_{56} & C_{56} & C_{52} & C_{55} & C_{54}\\ C_{41} & C_{46} & C_{46} & C_{42} & C_{45} & C_{44}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}C_{15} & C_{14} & C_{13}\\ C_{65} & C_{64} & C_{63}\\ C_{65} & C_{64} & C_{63}\\ C_{25} & C_{24} & C_{23}\\ C_{55} & C_{54} & C_{53}\\ C_{45} & C_{44} & C_{43}\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}C_{51} & C_{56} & C_{55}\\ C_{56} & C_{52} & C_{54}\\ C_{41} & C_{46} & C_{45}\\ C_{46} & C_{42} & C_{44}\\ C_{31} & C_{36} & C_{35}\\ C_{36} & C_{32} & C_{34}\end{pmatrix}.$$

Перехід від тензору **C** 4-го порядку до матриці розміром 6x6 можна здійснити за схемою (табл. 1) [27].

Таблиця 1 – Конвертування між тензором жорсткості четвертого порядку та матричним поданням

Коефіцієнти матриці, *i, j*	Індекси тензора, *rk, jl*
1	11
2	22
3	33
4	23 = 32
5	31 = 13
6	12 = 21

За допомогою (19) можна проводити тривимірний аналіз поширення УСХ в пружному хвилеводі за результатами розрахунку задачі власних значень площини перерізу, що розташована перпендикулярно до напрямку поширення хвиль.

Граничні умови

При аналізі стінки трубопроводу верхня і нижня границі розділу фаз стінка – навколишнє середовище є вільною для переміщень. В цьому випадку необхідно задати граничні умови за допомогою рівняння Неймана [1]:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u})=0\,. \quad (20)$$

При аналізі поширення УСХ є необхідність знати параметри поширення хвиль в місцях защемлення стінки труби, наприклад, під опорами, хомутами тощо. В цьому випадку застосовується гранична умова Діріхледо вибраної ділянки стінки труби [28]:

$$\mathbf{u}=const\,. \quad (21)$$

Коли стінка трубопроводу контактує із іншим середовищем, що не є повітрям, відбувається адсорбування хвильової енергії від стінки у зовнішнє середовище. В цьому випадку таку ділянку границі розділу стінка труби – навколишнє середовище можна описати граничними умовами із адсорбуванням [28]:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u})=\mathbf{q}\mathbf{u}\,. \quad (22)$$

У випадку, коли поперечний переріз хвилеводу набагато більший за довжину хвилі, описувати всю його площину перерізу скінченними елементами є ресурсоємною задачею. Тому можна взяти для опису частину хвилеводу, а на бічних сторонах перерізу задати періодичні граничні умови [28]:

$$\mathbf{u}(x_0)=\mathbf{u}(x_1)\,, \quad (23)$$

де x_0, x_1 – відповідно початок і кінець площини перерізу хвилеводу, описаної скінченними елементами.

Періодичні граничні умови є модифікацією граничних умов Неймана. Значення цих умов полягає в тому, що задані границі мають однакове переміщення, що означає неперервність зміщень.

Умова можливості збудження моди ультразвукової спрямованої хвилі первинним перетворювачем

За допомогою розробленої математичної моделі опису властивостей УСХ можна визначати їх дисперсні криві, залежність хвильового числа, фазової чи групової швидкості від частоти. Така інформація дозволяє визначити, чи можуть існувати моди в досліджуваному об'єкті і які їх властивості, проте дисперсні криві не можуть дати відповіді про ступінь збуджуваності моди в об'єкті первинним перетворювачем. Ступінь збуджуваності моди є однією із базових властивостей системи генерування та детектування мод акустичного контролю. Концепція збуджуваності мод УСХ була запропонована групою науковців на чолі з П. Вілкоксом для їх методу НАМСЕ [24]. Удосконалимо підхід цієї концепції для визначення ступеня збуджуваності мод представленим НАМСЕ.

Розглянемо випадок, коли гармонічна сила прикладена до вузла скінченного елементу, що описує досліджуваний об'єкт. Місце прикладання такої сили може бути будь-яким і не залежить від форми поперечного перерізу хвилеводу. Ця прикладена сила збудить всі моди, що можуть існувати в досліджуваному об'єкті на частоті, що дорівнює частоті цієї сили. Амплітуда кожної окремої моди може бути визначена

за зміщенням елементарного об'єму пружного середовища, оскільки внаслідок розв'язання задачі власних значень всі зміщення в досліджуваному об'єкті викликані модами. Ступінь можливості збудження моди $E_{зб}$ залежить від величини прикладеної сили та зміщення елементарного об'єму пружного середовища. $E_{зб}$ за результатами розрахунку задачі власних значень буде пропорційне такому виразу [24]:

$$E_{зб} \propto \mathbf{u}^2 f \ , \qquad (24)$$

де f – частота коливань.

Проведення обчислень

Проведемо обчислення запропонованим методом для визначення його можливостей моделювати поширення УСХ в хвилеводах, товщина яких перевищує довжину хвилі. Властивості металевої стінки труби наведено в табл. 2, решта коефіцієнтів жорсткості дорівнюють нулю, що обумовлено кубічною структурою ґратки сталі і її властивостями симетрії.

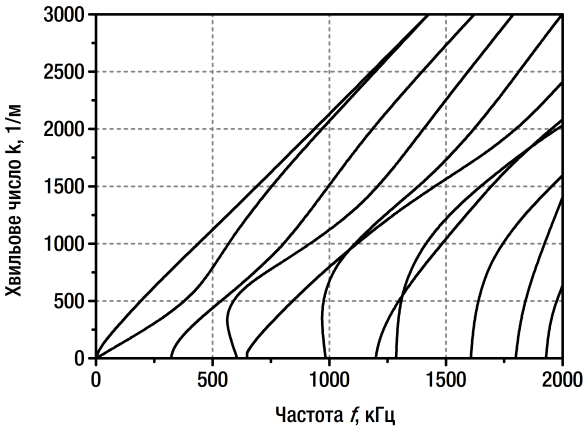
Таблиця 2 – Пружні властивості ізотропної сталі стінки трубопроводу

Позначення коефіцієнта	Значення коефіцієнта
$C_{11} = C_{22} = C_{33}$	282,69, ГПа
$C_{12} = C_{13} = C_{23}$	121,15, ГПа
$C_{44} = C_{55} = C_{66}$	80,769, ГПа
ρ	7850 кг/м^3

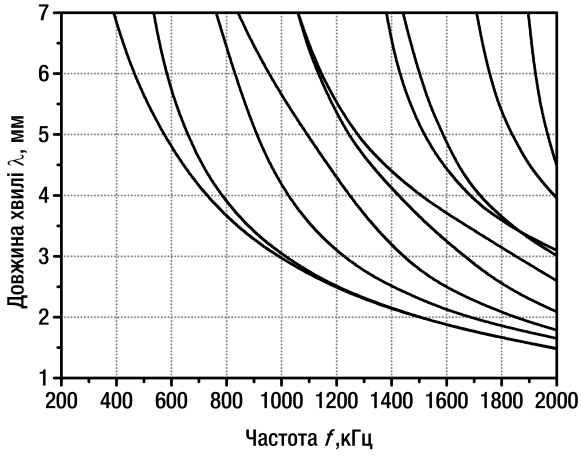
У разі проведення обчислення розробленим НАМСЕ було встановлено, що кількість коренів характеристичного рівняння обернено пропорційно залежить від величини розміру скінченного елементу. При використанні граничних періодичних умов ширина поперечного перерізу хвилеводу, що описується скінченними елементами, може дорівнювати кільком скінченним елементам. Нами було випробувано ширину сітки скінченних елементів від 0,2 мм до 20 мм. При звуженні ширини скінченного елементу пошук коренів задачі власних значень зміщується в сторону збільшення хвильового числа.

Для порівняльного аналізу отриманих результатів нами було розраховано дисперсні криві хвильового числа мод Лемба для пластини товщиною 5 мм (рис. 2) [29]. Результати розрахунку НАМСЕ (рис. 3) показують більше коренів у вказаному діапазоні частот. Можна виділити дві групи коренів задачі власних значень з малим та великим значенням хвильового числа. Корені з малим значенням хвильового числа розміщують навколо нульових мод Лемба, що підтверджує відповідність розрахунку трансцендентним рівнянням, які широко описані у фаховій літературі. Інші типи розв'язків необхідно досліджувати.

На рис. 4 – 6 зображено розподіл поля зміщень по товщині хвилеводу, що відповідає кореням розв'язку характеристичного рівняння. Розподіл поля зміщень елементарного об'єму



а)



б)

Рисунок 2 – Дисперсні параметри ультразвукових спрямованих хвиль для пластини товщиною 5 мм

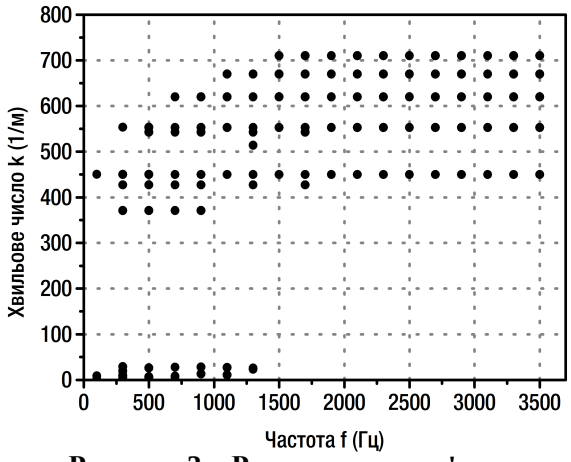


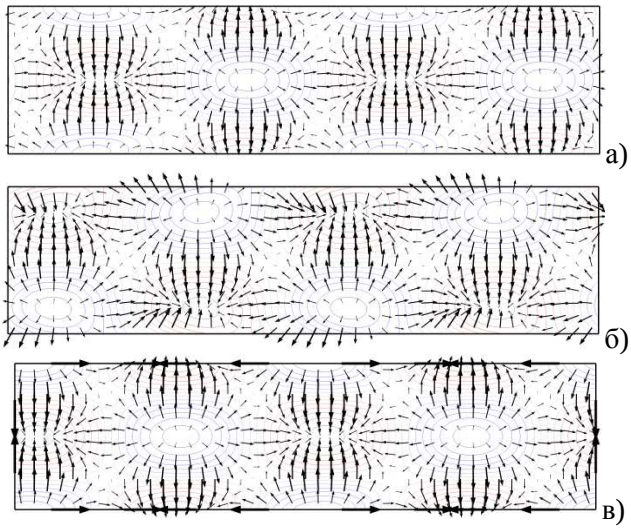
Рисунок 3 – Результати розв'язку характеристичного рівняння для хвильового числа мод спрямованих хвиль для пластини товщиною 5 мм

середовища представлено контурними ізолініями із однаковим значенням зміщення [30]:

$$z(x_1, x_2) = u_r(x_1, x_2)_{|u_r = const} \ , \qquad (25)$$

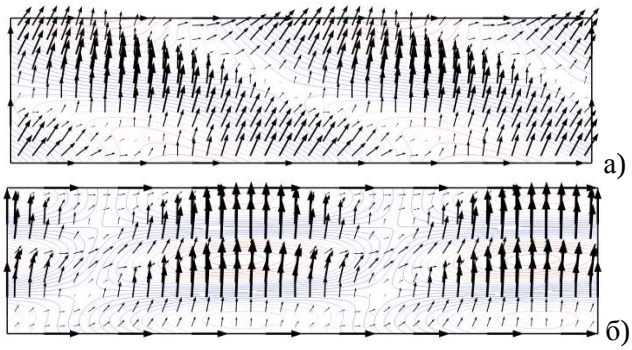
де z – контурна лінія на площині Ox_1Ox_2, на якій значення u_r є однаковим.

Оскільки u_r має одне і теж саме значення на лінії, то можна цю умову записати так [30]:



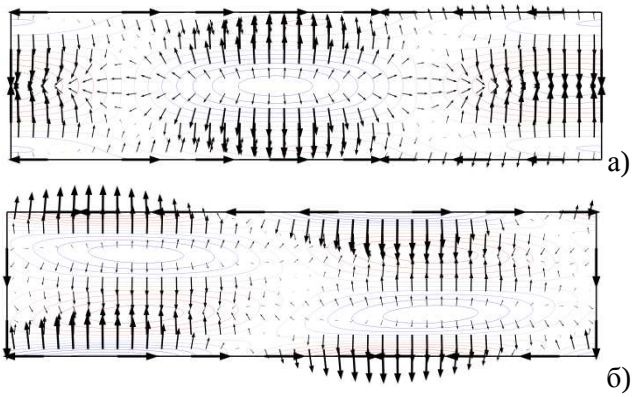
розподіл власних значень:*а*) u_1; *б*) u_2; *в*) u_3

Рисунок 4 –Розподіл хвильового поля мод спрямованих хвиль в стінці труби товщиною 5 мм при значенні хвильового числа *k*= 371,8 (1/м), частоті *f* = 300 (Гц)



хвильове число *k*, (1/м):*а*) *k*= 427,1; *б*) *k*= 543,3

Рисунок 5 – Розподіл хвильового поля мод спрямованих хвиль в стінці труби товщиною 5 мм за частоти *f* =1700 (Гц) та розподілу власних значень $\sqrt{u_1^2+u_2^2-2u_1u_2}$



хвильове число *k*, (1/м):*а*) *k*= 427,1; *б*) *k*= 543,3

Рисунок 6 – Розподіл хвильового поля мод спрямованих хвиль в стінці труби товщиною 5 мм при розподілі власних значень v_1, частоті *f* =1700 (Гц)

$$\frac{\partial u_r}{d\mathbf{n}} = 0\,, \qquad (26)$$

де **n** – одиничний вектор, що вказує напрямок найбільшої зміни u_r.

Побудова контурної ізолінії фактично зводиться до пошуку такого шляху, на якому виконується умова [30]:

$$\mathbf{n} \cdot grad\left(u_r\right) = 0\,. \qquad (27)$$

Стрілками всередині та по периметру моделі хвилеводу показано напрям зміщення. Величини стрілки пропорційна амплітуді зміщення елементарного об'єму пружного середовища. Масштаб стрілок відрізняється у кожному окремому рисунку, тому за їх розмірами можна оцінити тільки відносний розподіл амплітуд одного значення кореня характеристичного рівняння. Форма зміщення елементарного об'єму середовища, рис. 4*а* показує виражену симетричну моду, яка має також подібну форму і для кореня u_3. Порушення симетрії розподілу поля зміщень видно на рис. 4*б*. Таке порушення викликано тим, що по товщині стінки розміщуються дві пучності, а не три, як на рис. 4*а*, таке розміщення вказує на зсув по фазі стоячої хвилі, що формує спрямовану моду.

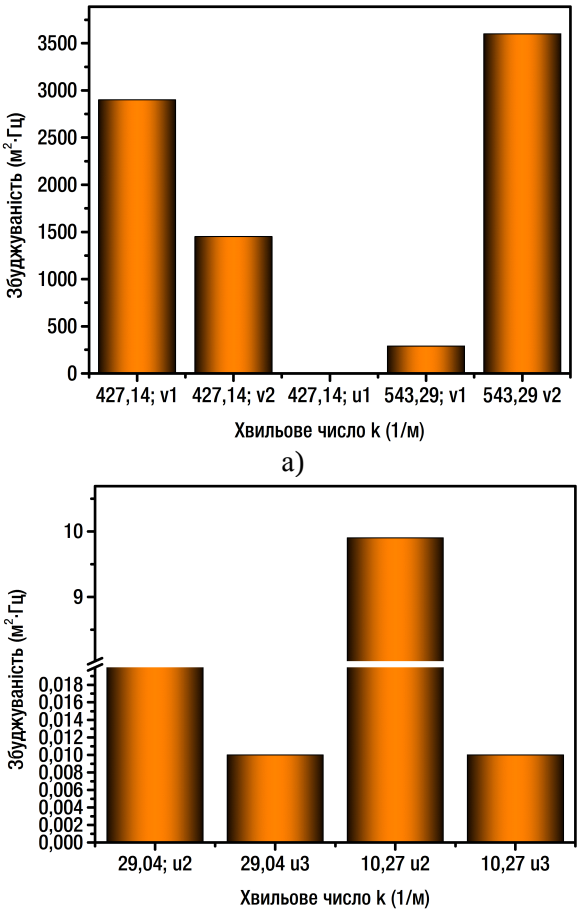
Розподіл поля зміщень, що відповідає частоті 1700 Гц, (рис. 4*а* та 4*б*) показує, що тут має місце негармонійне поширення коливань вздовж хвилеводу – основна частина пружного середовища зміщується в один бік. Інша форма розподілу зміщень пружного середовища показана для тієї ж частоти 1700 Гц та хвильових чисел але для коренів v_1 (рис. 6). Тут за формою зміщень можна побачити симетричну (рис. 6*а*) та антисиметричну (рис. 6*б*) моди.

Як видно із представлених рисунків, за допомогою НАМСЕ можна отримати більше інформації про природу утворення та поширення спрямованих хвиль, визначити більше коренів математичної моделі. Це означає, що за допомогою НАМСЕ більш повно описується хвильове поле у хвилеводі при поширенні в ньому спрямованих хвиль.

Ступінь збудження моди УСХ визначався на поверхні хвилеводу (поверхні стінки труби), інші місця у яких можна збуджувати моди не досліджувались, оскільки їх складно реалізувати (рис. 7). Із представлених рисунків видно, що моди, які описуються коренями **v**, мають більшу ступінь збуджуваності первинним перетворювачем у порівнянні із модами, що описуються вектором **u**. Порівняння мод здійснювалось для набору хвильових чисел одної частоти. Це має практичне значення тому, що моди збуджуються одним первинним перетворювачем, який працює на одній основній частоті. Первинним перетворювачем фактично збуджуються набір мод в околі його основної частоти та при співпаданні хвильових чисел падаючої хвилі на поверхню труби і УСХ всередині стінки труби.

Структура хвильового поля при збудженні і поширенні мод спрямованих хвиль

Проведемо загальний аналіз знайдених коренів характеристичного рівняння (рис. 3). Більша кількість коренів, що описує утворення і поширення мод в стінці труби, з одного боку, повно характеризує хвильове поля, з іншого боку, така кількість коренів може ускладнити використання представленої математичної моделі. Для спрощення використання результатів обчислення коренів характеристичного рівняння та їх структуризації введемо таке поняття, як



частота *f*, (Гц):*а*) *f*= 1700; *б*) *f*= 300

Рисунок 7 – Ступінь збуджуваності моди первинним перетворювачем в стінці труби товщиною 5 мм

критерій практичної придатності моди χ. Такий критерій повинен залежати від:

– показника гармонійного поширення моди $\vartheta_г$, який має ранжувати результати на гармонічні та спадаючі моди:

$$\vartheta_г = \begin{cases} 1, \forall\, гармонічних\ мод, \\ 0, \forall\, спадаючих\ мод; \end{cases} \qquad (28)$$

– критерію збуджуваності моди $E_{зб}^{кр}$, який показує наскільки *i*-та мода має більший ступінь збуджуваності порівняно із іншими модами, що збуджує первинний перетворювач. Нехай первинний перетворювач збуджує *J*мод, що можна визначити за результатами обчислення запропонованої математичної моделі, діапазоном частот та хвильовим числом. Критерій збуджуваності $E_{зб}^{кр}$ *i*-ої моди буде таким:

$$E_{зб}^{кр} = 100\% \cdot \frac{\left(E_{кр}\right)_i}{\sum_{j=1}^{J}\left(E_{кр}\right)_j}. \qquad (29)$$

Критерій збуджуваності моди $E_{зб}^{кр}$ не характеризує всю моду, а виключно один корінь розв'язку задачі власних значень;

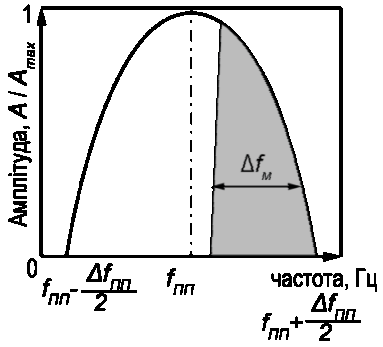
– критерію співпадіння моди за частотою ϑ_f, який повинен визначати наскільки частота

моди $f_м$ співпадає із головною частотою первинного перетворювача. Будь-який реальний первинний перетворювач генерує акустичні коливання у певному діапазоні частот $\Delta f_{ПП}$ (рис. 8). Цей діапазон частот, як правило, охоплює кілька мод. Енергія хвиль у діапазоні частот первинного перетворювача не однакова, а є найбільшою всередині $f_{ПП}$ і спадає на кінцях діапазону (рис. 8*а*). Зміщення частоти моди $f_м$ і головної частоти первинного перетворювача означає, що мода буде збуджуватись меншою кількістю енергії (рис. 8*б*):

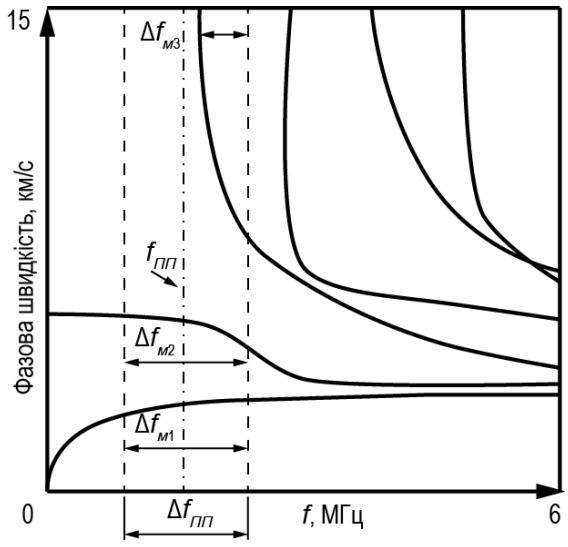
$$\vartheta_f = 100\% \cdot \left(1 - \frac{\Delta f_{ПП} - \Delta f_м}{\Delta f_{ПП}}\right), \quad (30)$$

$$\forall\, f_{моди} \in \left(f_{ПП} \pm \Delta f/2\right); \Delta f_м \le \Delta f_{ПП};$$

де $f_м$ – частота моди, що відповідає кореню характеристичного рівняння.



а)



б)

а) частотні діапазони первинного перетворювача та моди; б) дисперсія фазової швидкості мод Лемба

Рисунок 8 – Збудження мод за частотним критерієм

– критерію співпадання моди за хвильовим числом ϑ_k, який повинен визначати наскільки хвильове число хвилі $k_{пх}$, що падає на поверхню стінки труби однакове із хвильовим числом моди спрямованої хвилі $k_{моди}$, отриманої в результаті пошуку кореня характеристичного рівняння:

$$\vartheta_k = 100\% \cdot \left(1 - \frac{\left|k_{моди} - k_{пх}\right|}{k_{пх}}\right). \quad (31)$$

На основі розглядуваних показників можна побудувати рівняння для критерію практичної придатності моди χ. В роботі вибрано підхід акумулятивного критерію χ. Згідно з цим підходом мода є тим більш придатною до застосування, чим більшим є значення χ:

$$\chi = \vartheta_г \cdot \left(\frac{E_{зб}^{кр} + \vartheta_f + \vartheta_k}{3}\right). \quad (32)$$

Для більш практичного застосування χ розв'язки задачі власних значень можна ранжувати за двійковим критерієм $\chi_{пр}$:

$$\chi_{пр} = \begin{cases} 1, \forall \chi \ge \chi_{пор}, \\ 0, \forall \chi < \chi_{пор}. \end{cases} \quad (33)$$

де $\chi_{пор}$ – задане порогове значення критерію практичної придатності моди.

Для деяких методів акустичного контролю є важливим використання тільки тієї частини моди, в якої групова швидкість поширення $c_{гр}$ має незначний рівень дисперсії $\Delta c_{грпор}$ на певній смузі частоти $\Delta\omega$. До таких методів належить і товщинометрія ультразвуковими спрямованими хвилями. Введемо додатково критерій сталості групової швидкості моди $\vartheta_{гр}$:

$$\Delta c_{гр} = \frac{c_{гр}(\omega + \Delta\omega) - c_{гр}(\omega)}{\Delta\omega},$$

$$\vartheta_{гр} = \begin{cases} 1, \Delta c_{гр} \le \Delta c_{грпор}, \forall c_{гр} \in [\omega; \omega + \Delta\omega] \\ 0, \Delta c_{гр} > \Delta c_{грпор}, \forall c_{гр} \in [\omega; \omega + \Delta\omega] \end{cases}. \quad (34)$$

З врахуванням (34) рівняння (32) набуде вигляду

$$\chi = \vartheta_г \cdot \vartheta_{гр} \cdot \left(\frac{E_{зб}^{кр} + \vartheta_f + \vartheta_k}{3}\right). \quad (35)$$

Рівняння (35) не заперечує двійковий критерій, згідно якого результати розв'язку характеристичного рівняння або підходять для використання або ні.

Висновки

Із проведеного аналізу досліджень встановлено, що методи напіваналітичного розрахунку параметрів поширення акустичних спрямованих хвиль мають такі обмеження, як ресурсоємність, складність алгоритмів та інтерпретації результатів. Запропонований метод дозволяє проводити аналіз поширення спрямованої хвилі в тривимірному просторі шляхом аналізу поперечного перерізу хвилеводу, що значно зменшує час проведення обчислень.

В результаті проведення обчислень виявлено: а) при застосуванні періодичних граничних умов можна зменшувати сітку скінченних елементів, що моделює поперечний переріз хвилеводу, до кількох елементів без втрати точності обчислень; б) при зменшенні розміру

скінченного елемента точність пошуку коренів задачі власних значень зростає, проте початок їх пошуку зміщується до більших значень хвильового числа.

Введене поняття критерій практичної придатності моди дозволяє спростити аналіз результатів розрахунку параметрів поширення мод спрямованих хвиль.

Завданням подальших досліджень є побудова напіваналітичного методу для аналізу параметрів поширення ультразвукових спрямованих хвиль в зварному з'єднані магістральних трубопроводів.

Література

1 Predoi M. V. Wave propagation along transversely periodic structures / Predoi M. V., Castaings M., Hosten B., Bacon Ch. // Journal of Acoustical Society of America, 2007. – 121. – 4. – P. 1935-1944. – DOI: 10.1121/1.2534256.- ISSN 0001-4966.

2 Lowe M. J. S. Matrix technique for modelling ultrasonic waves in multilayered media / M. J. S. Lowe // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1995. – Volume 42.- Issue 4.- P. 525 - 542.- DOI 10.1109/58.393096.- ISSN 0885-3010.

3 Лютак І. З. Побудова та обчислення математичної моделі поширення кільцевих мод в трубопроводі спрямованими хвилями в ультразвуковому діапазоні частот / І. З. Лютак // Технічна діагностика і неруйнівний контроль. – 2009. – № 2. – С. 30-35.

4 Лютак І. З. Розроблення алгоритму обчислення дисперсних властивостей спрямованих ультразвукових хвиль та дослідження їх залежності від механічних характеристик сталі / І. З. Лютак // Збірник наукових праць. Серія: Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів. Неруйнівний контроль матеріалів і конструкцій (Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України). – 2009. – Вип. 14. – С. 22-28.

5 Thomson W. T. Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium / W. T. Thomson // Journal of Applied Physics, 1950. – Volume 21. – Issue 2. – 5 p. – DOI 10.1063/1.1699629 . – ISSN 1089-7550.

6 Haskell N. A. The dispersion of surface waves on multilayered media / N. A. Haskell // Bulletin of the Seismological Society of America, 1953.- vol. 43.- no. 1.- P. 17-34.- ISSN 1943-3573.

7 Hosten B. Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media / B. Hosten, M. Castaings // Ultrasonics, 2003.- Volume 41.- Issue 7.- P. 501–507.- DOI 10.1016/S0041-624X(03)00167-7.- ISSN 0041-624X.

8 Dong S. On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates / S. Dong, R. Nelson // Journal of Applied Mechanics, 1972.- Vol. 39.- Issue 3.- P. 739 - 746.- DOI 10.1115/1.3422782.- ISSN 1528-9036.

9 Dong S. Edge vibrations in laminated composite plates / S. Dong, K. Huang // Journal of Applied Mechanics, 1985.- Vol 52.- No 2.- P. 433–438.- DOI 10.1115/1.3169065.- ISSN 1528-9036.

10 Datta S. Wave propagation in laminated composite plates / S. Datta, A. Shah, R. Bratton, T. Chakraborty // Journal of Acoustical Society of America, 1988.- Volume 83.- Issue 6.-P. 2020-2026.- DOI 10.1121/1.396382.- ISSN 0001-4966.

11 Xi Z. Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells / Z. Xi, G. Liu, K. Lam, H. Shang // Journal of Acoustical Society of America, 2000.- Volume 108.- Issue 5.- P. 2179-2186.- DOI 10.1121/1.1316093.- ISSN 0001-4966.

12 Galan J. M. Lamb mode conversion at edges. A hybrid boundary element-finite-element solution / J. M. Galan, R. Abascal // Journal of Acoustical Society of America, 2005.- Volume 117.- Issue 4.- P. 1777-1784.- DOI 10.1121/1.1857525.- ISSN 0001-4966.

13 Shorter P. J. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates / P. J. Shorter // Journal of Acoustical Society of America, 2004.- Volume 115.- Issue 5.- P. 1917-1925.- DOI 10.1121/1.1689342.- ISSN 0001-4966.

14 Lagasse P. E. Higher-order finite-element topographic guides supporting elastic surface waves / P. E. Lagasse // Journal of Acoustical Society of America, 1973.- Volume 53.- Issue 4.- P. 1116-1122.- DOI 10.1121/1.1913432.- ISSN 0001-4966.

15 Gavric L. Finite element computation of dispersion properties of thin walled waveguides / L. Gavric // Journal of Sound and Vibration, 1994.- Volume 173.- Issue 1.- P. 113-124.- DOI 10.1006/jsvi.1994.1221.- ISSN 0022-460X.

16 Gavric L. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique / L. Gavric // Journal of Sound and Vibration, 1995.- Volume 185.- Issue 3.- P. 531–543.- DOI 10.1006/jsvi.1995.0398.- ISSN 0022-460X.

17 Hayashi T. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example / T. Hayashi, W.-J. Song, J. L. Rose // Ultrasonics, 2003.- Volume 44.- Issue 3.- P. 175–183.- DOI 10.1016/S0041-624X(03)00097-0.- ISSN 0041-624X.

18 Hayashi T. Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross section / T. Hayashi, C. Tamayama, M. Murase // Ultrasonics, 2006.- Volume 44.- Issue 1.- P. 17–24.- DOI 10.1016/j.ultras.2005.06.006.- ISSN 0041-624X.

19 Orrenius U. Calculation of wave propagation in rib stiffened plate structures / U. Orrenius, S. Finnveden // Journal of Sound and Vibration, 1996.- Volume 198.- Issue 2.- P. 203-224.- DOI 10.1006/jsvi.1996.0565.- ISSN 0022-460X.

20 Mazuch T. Wave dispersion modelling anisotropic shells and rods by the finite element method / T. Mazuch // Journal of Sound and Vibration, 1996.- Volume 198.- Issue 4.- P. 429-438.- DOI 10.1006/jsvi.1996.0580.- ISSN 0022-460X.

21 Mace B. R. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides / B. R. Mace, D. Duhamel, M. J. Brennan, L. Hinke // Journal of Acoustical Society of America, 2005.- Volume 117.- Issue 6.- P. 2835-2843.- DOI 10.1121/1.1887126.- ISSN 0001-4966.

22 Mahapatra D. R. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams / D. R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan // Composite Structures, 2003.- Volume 59.- Issue 1.- P. 67–88.- DOI 10.1016/S0263-8223(02)00228-3.- ISSN 0263-8223.

23 Chakraborty A. A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in layered composite media / A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan // International Journal of Solids and Structures, 2004.- Volume 41.- Issues 18–19.- P. 5155–5183.- DOI 10.1016/j.ijsolstr. 2004.03.011.- ISSN 0020-7683.

24 Wilcox P. Dispersion and excitability of guided acoustic waves in isotropic beams with arbitrary cross section / P. Wilcox, M. Evans, O. Diligent, M. Lowe, P. Cawley // The Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. - 2002. - Vol. 21. - P. 203 - 210. - ISSN 0003-6951.

25 Лютак І. З. Контроль пружних властивостей металу стінок магістральних трубопроводів акустичними методами: дис. ... докт. техн. наук: 05.11.13 / І. З. Лютак. – Івано-Франківськ, 2011. – 433 с.

26 Мандра А. А. Визначення величини модуля Юнга сталей магістральних газопроводів моделюванням методом скінченних елементів поширення ультразвукових мод Лемба / А. А. Мандра, І. З. Лютак, З. П. Лютак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ, 2011.- 4 (41).- С. 66 – 71.- ISSN 1993-9973.

27 Cheeke J. D. N. Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves / J. D. N. Cheeke. - CRC Press, 2002. - 480 p. - ISBN-10 0849301300.

28 Документація на пакет програм скінченно-елементного аналізу Comsol версія 4.3. - COMSOL Inc., 2012. - 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM) 12 см. – Системні вимоги: Pentium-266; 32 Mb RAM; DVD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.- Назва з титул.екрану.

29 Marzani A. A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped wave guides / A. Marzani, E. Viola, I. Bartoli, F. Lanza di Scalea, P. Rizzo // Journal of Sound and Vibration, 2008.- Vol. 318.- P. 488-505.- ISSN 0022-460X.

30 Walker L. Mathematics. Level 2 / L. Walker.- Manchester University Press, 2010.- 604 p.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.09.12
Рекомендована до друку професором ***В.М. Юрчишиним***