

## МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНТИНУАЛЬНОГО ТІЛА ДЛЯ ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКІВ ЕЛЕМЕНТІВ НАФТОПРОМИСЛОВОГО ОБЛАДНАННЯ

<sup>1</sup>А.О. Бедзір, <sup>2</sup>О.О. Бедзір, <sup>1</sup>А.С. Величкович

<sup>1</sup>ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 507626,  
e-mail: public@nung.edu.ua

<sup>2</sup>Івано-Франківський сектор Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,  
тел.(0342)507626, e-mail: ort@nung.edu.ua

*Представлено механіко-математичні моделі континуального плоского тіла на основі шарнірно-стрижневої структури. Визначено сталі пружності матеріалу пластини (модулі пружності першого та другого роду, коефіцієнт Пуассона), необхідні для аналізу напружено-деформованого стану та розрахунку на міцність. Проілюстровано шлях використання запропонованої моделі для розрахунку суцільних плоских тіл що зазнають згинання.*

*Представлены механико-математические модели континуального плоского тела на базе шарнирно-стрижневой структуры. Определены константы упругости материала пластинки (модули упругости первого и второго рода, коэффициент Пуассона), необходимые для анализа напряженно-деформированного состояния и расчета на прочность. Показано использование предложенной модели для расчета сплошных плоских тел при изгибе.*

*The continued plane body mechanical mathematical models on the bases of hinged-rod structure are represented in this article. The spring steels of plate's material (elasticity module of the first and second type, Poisson's ratio) used for tensely deformed state analysis and strength analysis are defined. The use of suggested model for continuous flat bodies that experience bending calculation is shown.*

Розвиток нафтової та газової промисловості потребує вдосконалення існуючого та розробки нового нафтогазового обладнання. Питання його надійності, міцності та довговічності мають першочергове значення. Суттєве зростання вимог щодо економічності, продуктивності, технологічного рівня і якості елементів нафтогазового обладнання вимагає більш точного математичного моделювання їх роботи та розрахунку міцності. При цьому необхідно враховувати технологічні особливості навантаження, властивості матеріалів, експлуатаційні умови тощо. У зв'язку з несприятливими економічними умовами вельми актуальною на сьогодні в Україні є розробка технологій подовження ресурсу та підвищення ефективності роботи існуючих об'єктів нафтогазового обладнання. Це вимагає від дослідників якісно нових концептуальних підходів щодо оцінки ресурсу та розрахунку несучих елементів конструкцій.

Зазвичай для розрахунку елементів нафтогазового обладнання застосовують моделі стрижнів, пластин, оболонки та методи теорії пружності і пластичності [1-3]. Використання методів і моделей теорії пружності пов'язане зі значними математичними труднощами та громіздкими розрахунками, що обмежує їх використання в інженерній практиці [4, 5]. Можливість зниження розмірності в моделях пружних тіл спрощує виведення та розв'язок рівнянь порівняно з тривимірними задачами теорії пружності. Тому для моделювання континуальних частин об'єктів нафтогазового обладнання, інженерного дослідження їх міцності та жорстко-

сті більш прийнятними є підходи, у яких застосовуються моделі та методи теорії стрижнів, пластин та оболонки [6-8]. Тут основною складністю постановки задачі теорії стрижнів є вибір адекватного механіко-математичного моделювання реальних конструкцій.

Поширеним елементом конструкцій та механізмів нафтогазового обладнання є континуальне плоске тіло. Для визначення напружено-деформованого стану таких елементів у процесі навантаження застосовують спрощені схематизовані моделі їх геометричної форми. Вказані плоскі тіла можуть бути змодельовані у вигляді панелі, плити або пластини різної конфігурації. Розрахунок на міцність, жорсткість та стійкість таких деталей зводиться до визначення напружено-деформованого стану пластини, яка зазнає згину, або навантажень у своїй площині. Постановка та розв'язок двовимірних задач теорії пружності є добре розробленою [4, 5]. Одним із недоліків використання теорії пластин та оболонки для розрахунку елементів нафтогазового обладнання є складність побудови моделі, яка б враховувала особливості геометрії тіла та його навантаження. Розв'язок отриманих задач є громіздким, а інколи і неможливим. Зважаючи на складність та громіздкість класичних способів було би добре отримати таку модель суцільного плоского тіла, за якої оперуючи лише категоріями основ технічної механіки та опору матеріалів можна одержувати прийнятну точність розв'язання принаймні деяких із перелічених складних задач.

Головна ідея моделювання така. Суцільно-плоскому тілу поставимо у відповідність шарнірно-стрижневу структуру. Параметри моделі структури підберемо такими, щоб вони в середньому ототожнювали властивості суцільного плоского тіла. Запропонована модель має низку переваг над континуальною схемою плоского тіла (наприклад, плитою). У стрижневій структурі легко можна врахувати довільні умови обпирання чи закріплення на контурі, а також будь-яке навантаження. Водночас тут можна застосувати ефективні та прості методи розрахунку стрижневих систем [8].

Розглянемо плоску шарнірно стрижневу структуру, що складається із двох видів стрижнів (рис. 1). Поздовжні стрижні завдовжки  $h$  мають жорсткість на розтяг у поперечному напрямі  $E_1 A_1$ . Діагональні стрижні завдовжки  $h\sqrt{2}$  мають жорсткість на розтяг у поперечному напрямі  $E_2 A_2$ . Коли така структура матиме велику кількість ланок, її можна розглядати як пластину, що працює у своїй площині.

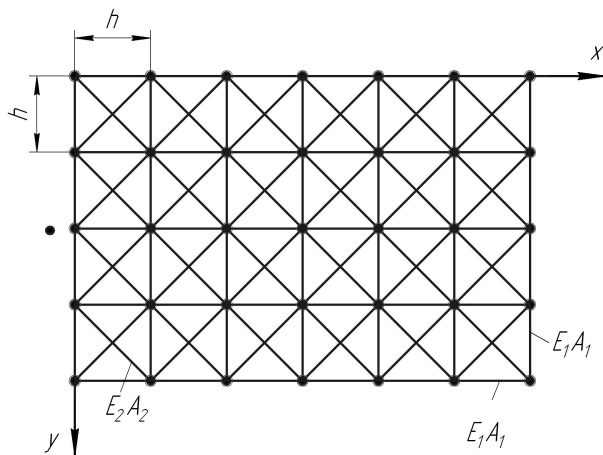


Рисунок 1

Визначимо пружні константи пластини, якою можна замінити стрижневу структуру. Зважаючи на симетрію об'єкта дослідження, залежність між напруженнями та деформаціями представимо узагальненим законом Гука для плоскої задачі [8]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \quad (1)$$

Співвідношення (1) записані відносно напружень матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2)$$

Отже, маємо три константи  $E$ ,  $\mu$  і  $G$ , які потрібно визначити.

Надамо горизонтального переміщення  $u$  правим вузлам вертикального ряду ланок відносно лівих вузлів (рис. 2). Це еквівалентно видовженню структури вздовж осі  $x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{u}{h}.$$

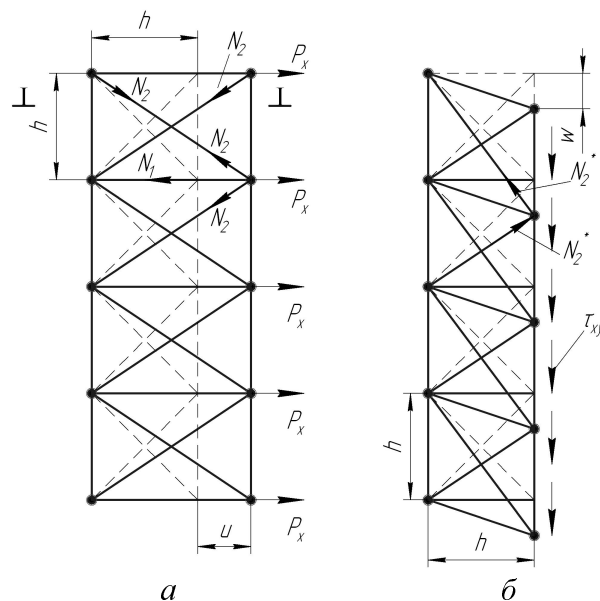


Рисунок 2

При цьому в горизонтальних стрижнях виникнуть поздовжні сили

$$N_1 = \frac{u}{h} E_1 A_1, \quad (3)$$

а в діагональних стрижнях

$$N_2 = \frac{u}{2h} E_2 A_2. \quad (4)$$

З умови рівноваги одержимо таке співвідношення

$$P_x = N_1 + 2N_2\sqrt{2},$$

або з урахуванням (3) і (4)

$$P_x = \frac{u}{h} \left( E_1 A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2 \right). \quad (5)$$

Розділивши  $P_x$  на  $h$ , одержимо напруження  $\sigma_x$  (товщину структури прийемо рівною одиниці).

$$\sigma_x = \frac{P_x}{h} = \frac{\varepsilon_x}{h} \left( E_1 A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2 \right). \quad (6)$$

Оскільки при цьому лінійна деформація в напрямку осі  $y$  дорівнює нулеві  $\varepsilon_y = 0$ , то з рівнянь (2) для суцільного плоского тіла маємо

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \varepsilon_x; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \mu\varepsilon_x. \quad (7)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (6) та першого виразу (7)

$$\frac{E}{1-\mu^2} = \frac{1}{h} \left( E_1 A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2 \right). \quad (8)$$

Тепер проведемо довільний горизонтальний переріз  $I-I$  (рис. 2,а) і знайдемо внутрішні сили, що діють у вертикальному напрямку. Розділивши їх на одиницю горизонтальної довжини структури, одержимо

$$\sigma_y = \frac{\varepsilon_x}{h\sqrt{2}} E_2 A_2. \quad (9)$$

Прирівнявши праві частини (9) і другого виразу (7) одержимо

$$\frac{E}{1-\mu^2} \mu = \frac{E_2 A_2}{h\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Розділивши співвідношення (10) на (8), знайдемо коефіцієнт Пуассона

$$\mu = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2}{E_1 A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2} = \frac{\psi}{\sqrt{2} + \psi}, \quad (11)$$

де ми ввели позначення

$$\psi = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}. \quad (12)$$

Враховуючи результат (11) з рівняння (8) знайдемо модуль пружності

$$E = \frac{E_1 A_1}{h} \cdot \frac{E_1 A_1 + \sqrt{2} E_2 A_2}{E_1 A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 A_2} = \frac{1}{h} \cdot E_1 A_1 \cdot \frac{\sqrt{2} + 2\psi}{\sqrt{2} + \psi}.$$

Для визначення величини модуля зсуву, надамо вертикального переміщення  $w$  правому ряду вузлів (рис. 2б). У діагональних стрижнях виникнуть поздовжні сили

$$N_2^* = \frac{w}{2h} \cdot E_2 A_2,$$

що створюють зсувні напруження

$$\tau_{xy} = \frac{w}{h^2 \sqrt{2}} \cdot E_2 A_2. \quad (14)$$

Тут враховано, що деформація зсуву  $\gamma_{xy} = \frac{w}{h}$ . Використовуючи останнє рівняння (2) та враховуючи (12) і отримане співвідношення (14), одержимо вираз для модуля зсуву

$$G = \frac{E_1 A_1}{h} \cdot \frac{\psi}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

В загальному випадку довільного відношення  $\psi = E_2 A_2 / E_1 A_1$  матимемо ортотропну пластину. Пластина є ізотропною, якщо виконується відповідний взаємозв'язок між пружними константами [8]

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (16)$$

Підставимо в залежність (16) отримані результати (1), (13) та (15) і одержимо умову ізотропності пластини

$$\frac{\psi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2\psi}{\sqrt{2} + \psi} \cdot \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{\psi}{\sqrt{2} + \psi} \right)} = \frac{\sqrt{2} + 2\psi}{2\sqrt{2} + 4\psi},$$

звідси маємо

$$2\psi + 2\sqrt{2}\psi = \sqrt{2} + 2\psi; \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За формулами (11), (13), (15) обчислюємо пружні константи ізотропної стрижневої структури.

$$\mu = \frac{1}{3}; \quad E = \frac{4}{3} \cdot \frac{E_1 A_1}{h}; \quad G = \frac{1}{2h} \cdot E_1 A_1. \quad (17)$$

Така структура за великої кількості ланок буде еквівалентна плоскому ізотропному тілу, що виготовлене із пружного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\mu = 1/3$ . І навпаки, пружна плита з коефіцієнтом Пуассона  $1/3$ , навантажена зусиллям, які діють в її площині, може бути замінена розглянутою шарнірно-стрижневою структурою з параметром  $\psi = 1/\sqrt{2}$ . Зведені жорсткості стрижнів модельної структури  $E_1 A_1$  і  $E_2 A_2$  визначаємо з формул (12), (17)

$$\frac{E_1 A_1}{h} = \frac{3}{4} E = 2G; \quad E_2 A_2 = \frac{E_1 A_1}{\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Запропонована модель континуального тіла дає змогу здійснювати розрахунок на міцність.

Скориставшись критерієм міцності за максимальними розтягуючи ми напруженнями та результатами (6) і (7), маємо

$$\frac{\varepsilon_x}{h} \cdot \left( E_1 A_1 + \frac{E_2 A_2}{\sqrt{2}} \right) = [\sigma]_{екв},$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_x = [\sigma].$$

Звідси легко знайдемо еквівалентну характеристику міцності

$$[\sigma]_{екв} = \frac{2}{3} [\sigma] \cdot \left( 1 + \frac{\psi}{\sqrt{2}} \right).$$

У деяких випадках стрижневе моделювання ізотропного плоского тіла доцільно здійснювати у вигляді сукупності рівносторонніх трикутників рис. 3. Ізотропія такого об'єкта забезпечується наявністю більш ніж двох осей симетрії.

Для визначення параметрів такої стрижневої структури піддамо її розтягу у напрямку  $x$  напруженнями  $\sigma_x$  та вважатимемо  $\sigma_y = 0$ . У такому разі внутрішні сили виникнуть лише в стрижнях, паралельних осі  $x$

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} b \sigma_x.$$

Лінійна деформація у напрямку осі  $x$  (рис. 4)

$$\varepsilon_x = \frac{u}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} b \frac{\sigma_x}{E_1 A_1}.$$

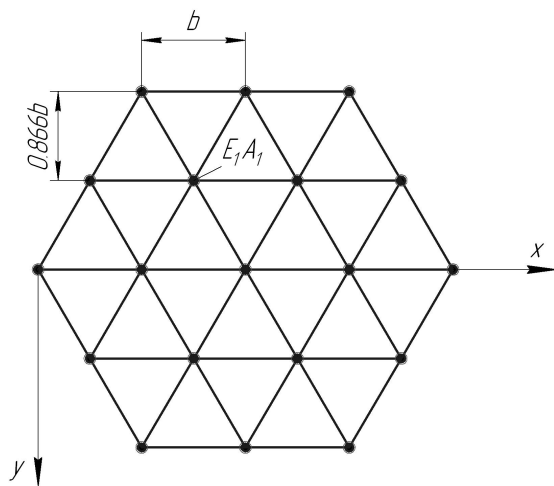


Рисунок 3

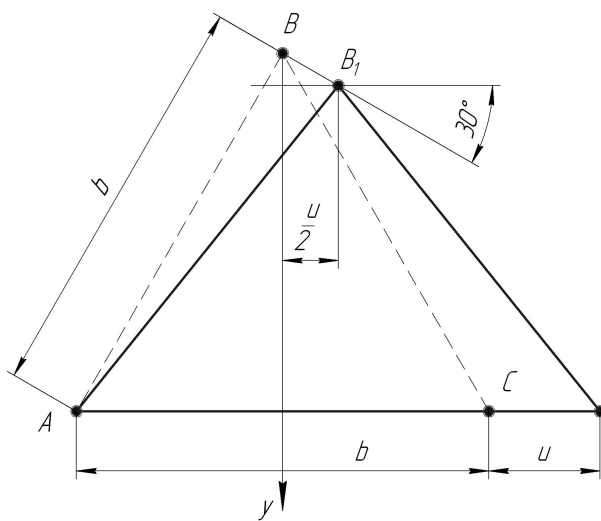


Рисунок 4

Переміщення вузла  $B$  у напрямку осі  $y$  визначимо з умови рівності довжин  $AB$  і  $AB_1$ . З точністю до величин першого порядку маємо

$$\varepsilon_y = \frac{u}{3b}.$$

Звідси знаходимо модуль пружності трикутної структури

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{E_1 A_1}{b}$$

і коефіцієнт Пуассона

$$\mu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{1}{3}.$$

Бачимо, що значення коефіцієнта Пуассона для трикутної структури і квадратної структури з діагоналями збігаються.

Описаним способом моделювання також можна легко скористатись під час розрахунку суцільних плоских тіл, що зазнають згинання. Для такого випадку замість стрижнів, що працюють на розтяг чи стискання, застосовуються балки, що працюють на згин. Як один із варіантів побудови, схема балкової структури може бути такою, як для уже розглянутої плоскої за-

дачі (рис. 1). Висоту балок прийемо рівною товщині плоского тіла  $\delta$ . Умова ізотропії розрахункової схеми вимагає, щоб ширина діагональних балок  $k$  була в  $\sqrt{2}$  рази меншою від ширини балок  $k_{(i)}$ , що йдуть у напрямках  $x$  і  $y$ . Для кожного безмежно тонкого шару плоского тіла  $d\delta = 1$  виконуються залежності (17)

$$\mu = \frac{1}{3}; \quad E = \frac{4}{3} \cdot \frac{E_1 k_1}{h}.$$

Перейдемо до суцільного плоского тіла (наприклад, плити) і виразимо його циліндричну жорсткість через жорсткості балок модельної структури

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E_1 k_1 \delta^3}{8h}.$$

Звідси одержуємо параметри модельних балок.

### Висновки

Описаний метод моделювання континуальних тіл дає змогу замінити використання доволі складних та громіздких математичних задач теорії пружності більш простими технічними задачами, точність розв'язку яких є достатньою для інженерного розрахунку на міцність та жорсткість елементів нафтогазового обладнання.

У процесі виробництва деталей нафтопромислового обладнання все частіше використовують композитні матеріали. Перелічені моделі можуть бути адаптовані до опису анізотропного суцільного плоского тіла. Для цього слід у постановці задачі описати властивості структури у відповідних напрямках та записати умови ортотропії.

Тестування описаних моделей на прикладних задачах про розтяг та згин тонких плит зосередженими силами показав високу точність способу. Наприклад, вектор переміщень вузлів модельної шарнірно-стержневої структури (включаючи перетини діагоналей) добре збігається зі значеннями переміщень у тонкій плиті, знайденими методами теорії пружності, (відхилення не перевищувало 6%).

Представлена модель континуального тіла може бути використана в системах автоматизованого проектування (САПР), що дасть змогу розраховувати деталі складної конфігурації, візуалізувати процес розрахунку та конструювання елементів нафтогазового обладнання. Метою подальших досліджень є адаптація даної моделі до використання в САПР. Даний підхід до моделювання тіла може бути розширено для розрахунку елементів при їх динамічному навантаженні.

### Література

1 Ефимченко С.И. Расчет и конструирование машин и оборудования нефтяных и газовых промыслов. Ч.1 / С. Ефимченко, А. Прыгаев. – М.: Нефть и газ, 2006. – 736 с.

2 Абубакиров В.Ф. Буровое оборудование: Справочник в 2-х томах. Том 1. / В. Абубакиров, В. Архангельский, Ю. Буримов, И. Малкин. – М.: ОАО "Издательство "Недра", 2000. – 763 с.

3 Хворостовский С.С. Морские буровые моноопорные основания. Теоретические основы проектирования и эксплуатации / С. Хворостовский. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2002. – 303 с.

4 Подгорный А.Н. Основы и методы прикладной теории упругости / А. Подгорный, Г. Марченко, В. Пустынников. – Киев: Выща школа, 1981. – 328 с.

5 Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости / В. Рекач. – М.: Машиностроение, 1973. – 384 с.

6 Григоренко Я.М. Основні теорії пластин та оболонок / Я. Григоренко, Л. Мольченко – К.: Либідь, 1993. – 256 с.

7 Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин / И. Биргер, Б. Шор, Г. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.

8 Писаренко Г.С. Опір матеріалів. / Г. Писаренко, О. Квітка, Е. Уманський. – К.: Вища школа, 1993. — 655 с.

*Стаття постуила в редакційну колегію*

*11.03.09*

*Рекомендована до друку професором*

***М. В. Лисканичем***