

ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА КОНТРОЛЮ ЗА ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ У НАФТОГАЗОВІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Л.І.Криштона, А.В.Сворац

ІФНТУНГ, 76019, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42123
e-mail: retes@mail.ru

Стаття посвячена применению рядов Фурье в компьютерной графике, применяемой в нефтегазовой промышленности, так как двумерные изображения можно представлять, в виде двумерного сигнала, несмотря на то, что в аналоговой форме этот сигнал бесконечный, в дискретной он обозначен только в точках растрового изображения. Предложен и разработан алгоритм уплотнения, использующийся в формате сохранения изображения JPEG, и построенный на основании дискретного косинусного преобразования, во избежание явления Гиббса. Обоснована актуальность исследований периодических функций, разложенных на спектр, что представляет собой физический аналог математических изложений.

На сьогоднішній день ряди Фур'є є дуже живими у науці, техніці та нафтогазовій промисловості. Геологічні умови сучасного буріння на нафту та газ, велика глибина свердловин, присутність у розрізі проникних пластів з аномальним пластовим тиском диктують необхідність постійного удосконалення технології та техніки буріння свердловин. Інженери на виробництві повинні не тільки розпізнавати перші ознаки порушення неперервності технологічного процесу, нафтогазопроявів, поглинання, обвалів, прихоплень тощо, але й мати конкретні уявлення про фізико-математичну сутність різних ускладнень та аварій при бурінні свердловини, та сучасні методи, пристрої та діагностичну апаратуру для їхньої ліквідації. Перспективним напрямком удосконалення технологічних операцій є автоматизація їхніх процесів на основі широкого впровадження електричних, електронних систем та комп'ютерних технологій, бурхливий розвиток яких спостерігається останнім часом. Це пов'язано з тим, що людина, при ручному керуванні процесом гальмування, не здатна забезпечити оптимальність цього процесу в залежності від дії різних чинників.

Таким чином, інженерно-технічні працівники на буровій установці повинні знати як функція інтенсивності від часу трансформувалася (за допомогою відповідного програмного забезпечення) у функцію амплітуди залежно від частоти для обробки діагностичною апаратурою передознак несправностей нафтогазового обладнання. Перетворення Фур'є може представити сигнал, що змінюється в часі, у вигляді залежності частоти і амплітуди, але воно дає також інформацію про фазу. На рис. 1 зображено графік у поперечному перерізі, і він нам на-

The paper is devoted to application of the Fourier's rows in computer graphics in oil and gas industry as two measured images can be represented, as a two measured signal, in spite of the fact that in an analog form this signal is endless, in discrete he is marked only in the points of bitmapped image. The algorithm of compression, used at format of saving of the JPEG image, is offered and developed, built on the basis of discrete cosines transformation, in avoidance of the Gibbs phenomenon. Actuality of researches of the periodic functions decomposed on a spectrum is grounded, that is the physical analogue of mathematical expositions.

гадує складну хвилю, яка складається із великої кількості простих гармонік з різними частотами, сума яких є періодичною функцією.

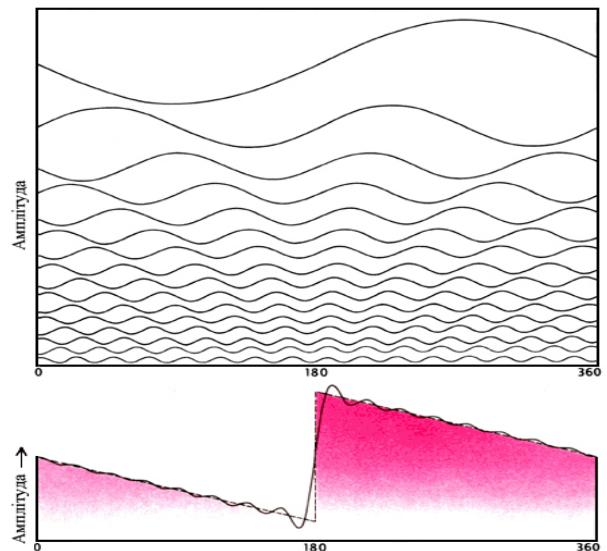


Рисунок 1 — Поперечний переріз

Графік суми гармонік різко відрізняється від графіків функцій, що додаються. Описана сума є рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

де:
$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Дана функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ на проміжку від $(-\pi; \pi)$ повинна задовольняти умовам Діріхле, а саме:

- 1) Якщо вона на цьому інтервалі має скінченну кількість точок розриву першого роду;
- 2) Якщо вона на цьому інтервалі має скінченну кількість точок екстремуму;
- 3) Якщо існує правостороння границя лівого кінця функції та лівостороння границя правого кінця.

Також слід звернути увагу на явище Гіббса: зі збільшенням числа членів у сумі апроксимуюча крива наближається до графіка вихідної функції у всіх точках, крім точок розриву. У цих точках з'являються маленькі виступи. Зі збільшенням числа доданків ці виступи зміщуються до точки розриву. Коли число доданків у частинній сумі збільшується, площа виступу на кривій зменшується, причому виступи не зменшуються по висоті, а лише стають вужчими.

Таким чином, нескінченний ряд в границі наближається за видом до потрібної функції, за виключенням виступів, які з'являються, як вказано, біля точок розриву. Така поведінка частинних сум називається явищем Гіббса, причому з ним ми повсякчас зустрічаємося, коли маємо справу з апроксимацією розривних функцій у їхніх точках розриву. Доведено, що величина виступу залежить від величини стрибка функції у точці розриву. Якщо цей стрибок дорівнює h то величина виступу для функції періоду 2π дорівнює $0,0895h$.

З явищем Гіббса можна боротися у випадку парних функцій, які за періодичного поширення не мають розривів; а також функцій, заданих на половинному періоді, які поширюють у сусідній інтервал (для запобігання цього явищу) за допомогою розкладу в ряд Фур'є за косинусами, якому притаманні кращі властивості збіжності. Проте якщо функція $f(x)$, задана на інтервалі $(0; \pi)$, у точках $x=0$ та $x=\pi$ дорівнює нулеві, то слід віддати перевагу розкладанню її в ряд синусів, який у цьому випадку дає значено кращу збіжність, ніж ряд косинусів. Це пояснюється тим, що, здійснивши непарне продовження функції $f(x)$ з інтервалу $(0; \pi)$ в інтервал $(-\pi; 0)$, ми забезпечимо неперервність не лише самої функції у цих точках, але й її першої похідної.

Давайте представимо зображення як функцію двох змінних, визначену в точках кінцевого растрового зображення. Нехай $I(x, y)$ – значення атрибута пікселя (наприклад, номер палітри, інтенсивності) залежно від колірної моделі представлення зображення (рис. 2). Безліч таких функцій на точках фіксованого кінцевого растрового зображення утворюють скінченновимірний простір $R^{X,Y}$ розмірності $m \times n$ ($|X|=m, |Y|=n$) із скалярним утворенням

$$(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{m,n} I_1(i, j) I_2(i, j). \quad (2)$$

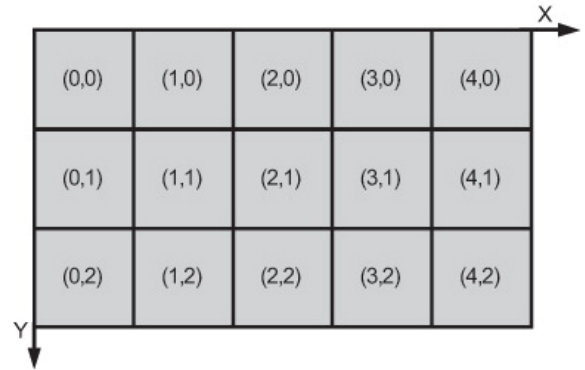
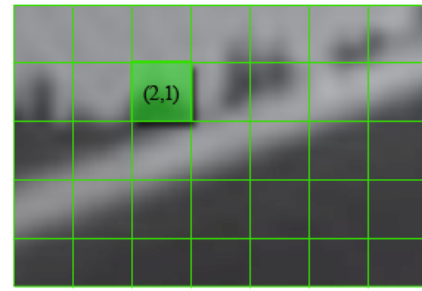


Рисунок 2 – Моделі представлення просторового зображення

Будемо ототожнювати із простором $I_2(X \times Y)$. У такому просторі існує базис, тобто така система елементів

$$\{e_k\}_{k=1}^{k=m \times n} \quad (3)$$

із $R^{X,Y}$ і такий набір одночасно не рівних нулеві коефіцієнтів

$$\{C_k\}_{k=1}^{k=m \times n}, \quad (4)$$

що для будь-якої функції I із цього простору виконується така рівність

$$I = \sum_{k=0} C_k e_k. \quad (5)$$

Якщо додатково припустити ортонормованість базису, тоді

$$(e_p, e_q) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases} \quad (6)$$

і виконуватиметься таке співвідношення $C_k = (I, e_k)$, де C – множина значень атрибутів (як правило, колір). Оскільки двовимірне зображення можна представити, як двовимірний сигнал, то у аналоговій формі цей сигнал безперервний, а у дискретній формі – визначений лише в точках растрового зображення D . Тому для розгляду зображення у визначеному прямокутнику зручно розкласти його в ряд Фур'є.

Розглянемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення. Якщо представити функцію комплексної змінної (F) у вигляді суми дійсної та уявної частин ($F = Re(f) + i Im(f)$), то модуль, (або амплітуда)

буде рівним $\sqrt{Re(f)^2 + Im(f)^2}$, а фазовий зсув

буде рівним $arctg \left[\frac{Im(f)}{Re(f)} \right]$. На графіках будуть

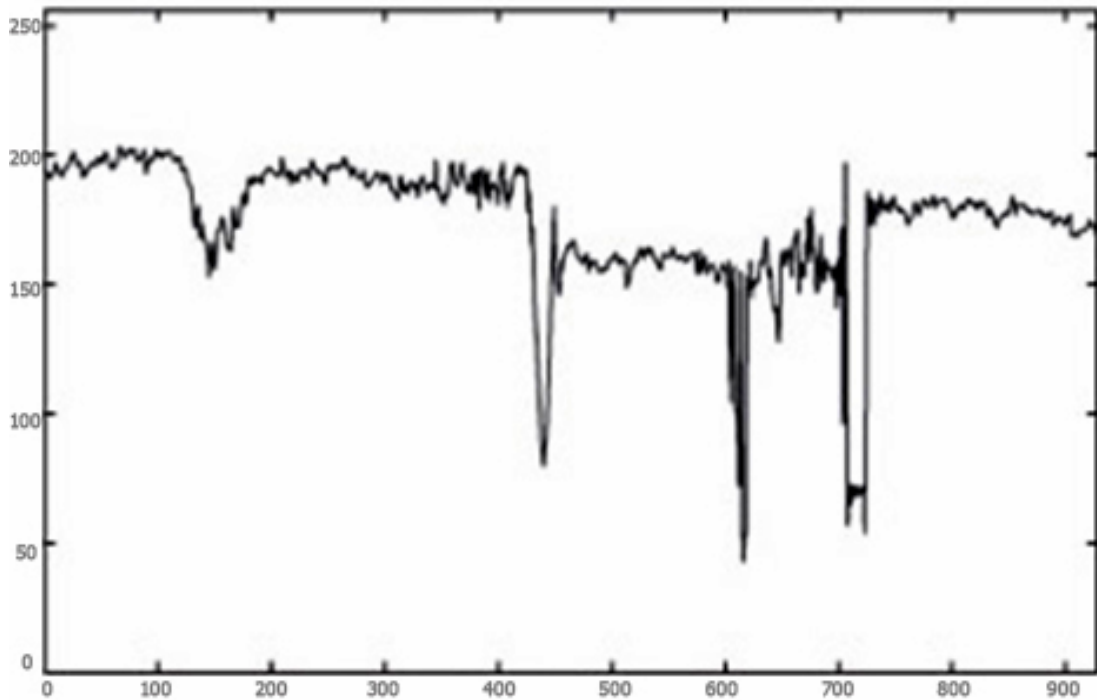


Рисунок 3 – Зріз як сигнал

представлені тільки наочні значення амплітуд. У багатовимірному випадку значення $f \times x$ замінюється на скалярний вираз векторів \vec{f} та \vec{x} . Тоді частотне представлення для одновимірної функції розраховується за допомогою перетворення Фур'є

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) [\cos 2\pi fx - i \sin 2\pi fx] dx,$$

що для загального двовимірного зображення перетворення Фур'є запишеться в такому вигляді:

$$F(f_x, f_y) = \int_{R^2} I(x, y) [\cos(2\pi(f_x x + f_y y)) - i \sin(2\pi(f_x x + f_y y))] dx dy. \quad (7)$$

Ми будемо застосовувати набагато простіші міркування та розглядатимемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення.

На рис. 3 зображено одновимірний сигнал як зріз двовимірного зображення.

Дані сигнали можна розглянути як в просторовій області (визначеній області) $R^n \ni D$, так і в частотній – C^n .

У дискретному випадку, якщо сигнал представлений у вигляді функції визначеного в N точках $x \in 0, \dots, N-1$, використовується дискретне перетворення Фур'є, яке, по суті, рядом Фур'є.

$$F(f) = \sum_{x=0}^{N-1} I(x) \left[\cos \frac{2\pi fx}{N} - i \sin \frac{2\pi fx}{N} \right], \quad (8)$$

де $f \in 0, \dots, N-1$ – також дискретна. Відповідне зворотне дискретне перетворення Фур'є запишеться у вигляді:

$$I(x) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(F) \left[\cos \frac{2\pi fx}{N} + i \sin \frac{2\pi fx}{N} \right]. \quad (9)$$

Дискретне перетворення володіє такими двома важливими властивостями.

По-перше, коефіцієнти незалежні один від одного, тобто точність представлення одного коефіцієнта не залежить від будь-якого іншого. Це сприятиме можливості одночасного врахування кількох чинників, що впливають на відповідний досліджуваний технологічний процес чи явище.

По-друге, перетворення зберігає основну інформацію за малої кількості коефіцієнтів. Дана властивість найсильніше виявляється на фотореалістичних зображеннях, що дозволяє досліджувати об'єкти, що перебувають у складному русі з врахуванням термонавантаження. Наприклад, зношування гальмівних шківів ледбідок бурових установок.

У комплексному вигляді наша функція для всього зображення матиме вигляд

$$F(k, l) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n I(p, q) e^{-\frac{2\pi i p k}{m}} e^{-\frac{2\pi i q l}{n}}, \quad (10)$$

для всіх $k = 1 \dots m, l = 1 \dots n$. Обернене перетворення Фур'є визначається так:

$$I(p, q) = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n F(k, l) e^{\frac{2\pi i k}{m} p} e^{\frac{2\pi i l}{n} q}. \quad (11)$$

Таким чином, система функцій

$$\left\{ e^{2\pi i \left(p \frac{k}{m} + q \frac{l}{n} \right)} \right\}_{k, l=0}^{m, n}, \quad (12)$$

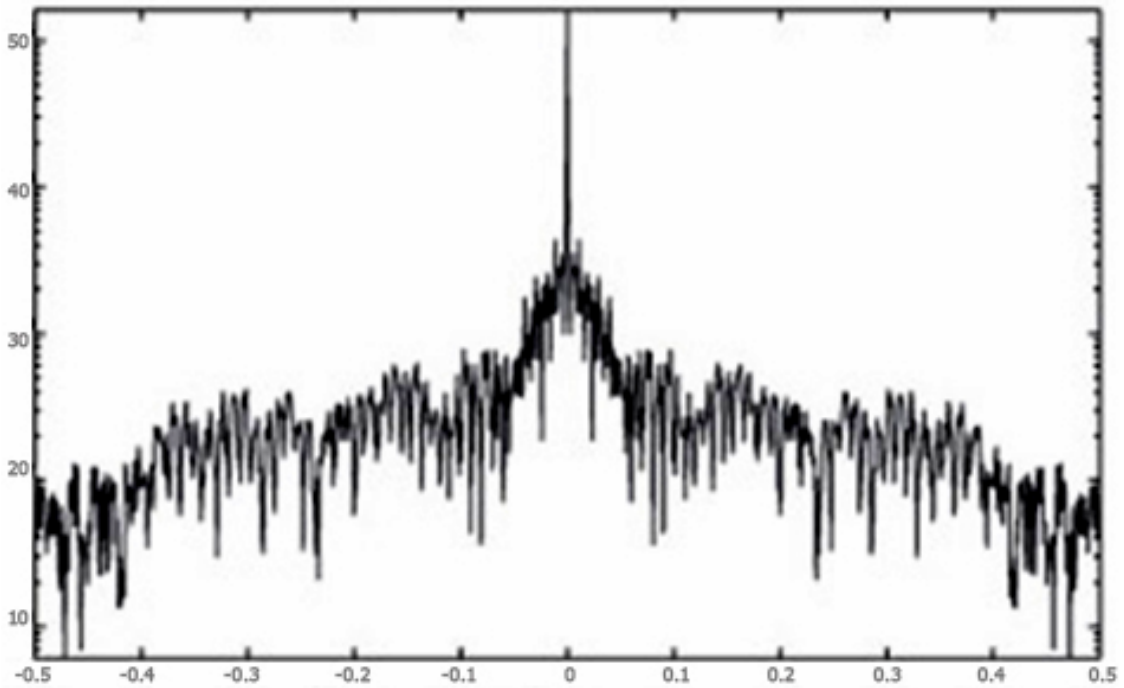


Рисунок 4 – Частотний спектр зрізу

утворює базис в просторі функцій зображення, а частотний спектр зрізу відображає рис. 4.

Існують алгоритми швидкого перетворення Фур'є. Якщо в області $F(f) = 0, |f| > f_{\text{макс}}$, то сигнал (функція) $I(x)$ має обмежений спектр з максимальною частотою $f_{\text{макс}}$. Тобто під час розкладання функції не присутні тригонометричні функції з частотою понад $f_{\text{макс}}$. Зазвичай дискретизація відбувається шляхом вимірювання сигналу через рівні проміжки в області визначення. Ця операція математично описується як множення функції $I(x)$ на гребінчастий фільтр, що складається з послідовності рівномірно зміщених функцій Дірака $\sigma(x)$:

$$\text{Comb}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x - nT), \quad (13)$$

де: $T = 1/f_s$ – період, f_s – частота дискретизацій. Цікавою властивістю функції Comb є те, що її перетворення Фур'є також є функцією Comb , проте із іншою амплітудою (не 1 а f_s) і частотою (також f_s), а σ -функція – це узагальнена функція, що визначається як неперервний лінійний функціонал у просторі функцій, що диференціюються, і не є функцією в класичному розумінні. Ця функція дозволяє записати просторову інтенсивність зображення зосередженою або прикладеною в одній точці. Наприклад, інтенсивність точкового зображення 1, що знаходиться в точці a , еклідового простору R^n , записується за допомогою σ -функції у вигляді $\sigma(x - a)$.

Алгоритм стиснення, використовуваний у форматі зберігання зображень JPEG, побудований на використанні дискретного косинусного

перетворення. Хороший ступінь стиснення з малими втратами інформації можна отримати лише у разі, коли багато коефіцієнтів Фур'є близькі або рівні нулеві.

Реальні зображення мають вельми складну структуру, і їх Фур'є-образ може не задовольняти подібним вимогам. Можна розбити зображення на області фіксованого розміру і виконувати перетворення в кожній області окремо (рис. 5). У кожній такій області зображення матиме менше особливостей, ніж все зображення загалом, і образи Фур'є цих областей можуть виявитися більш відповідними для стиснення, ніж образ всього зображення.

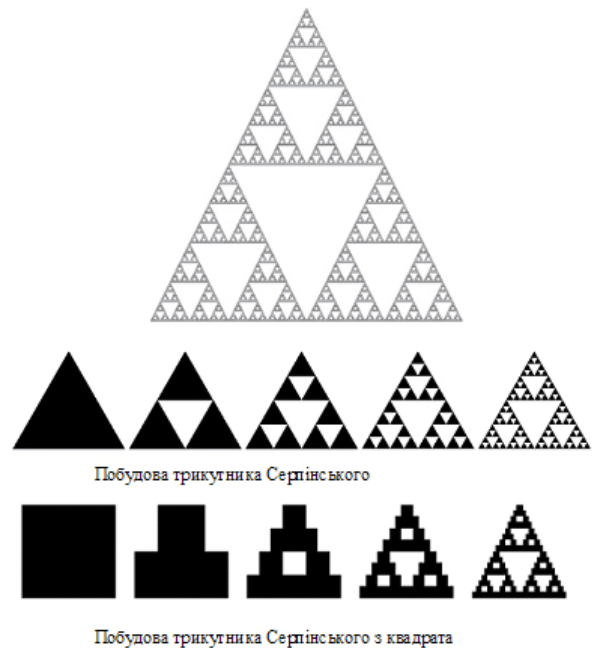


Рисунок 5 – Розбиття зображення на області

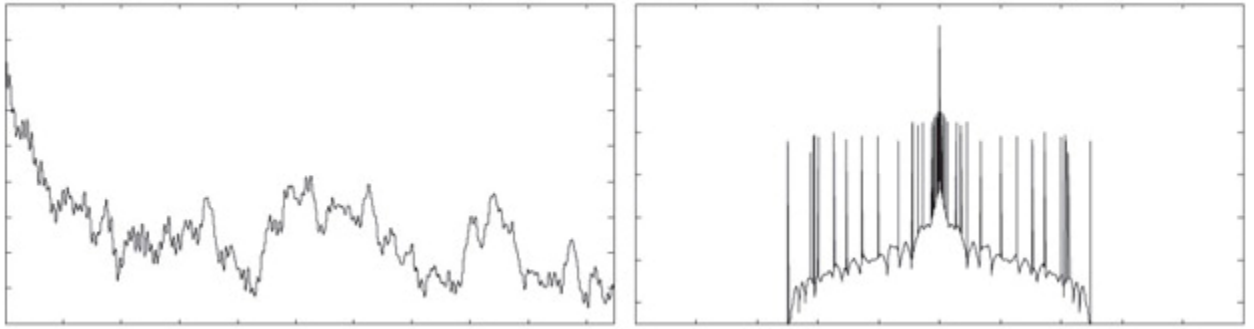


Рисунок 6 – Початковий сигнал зображення

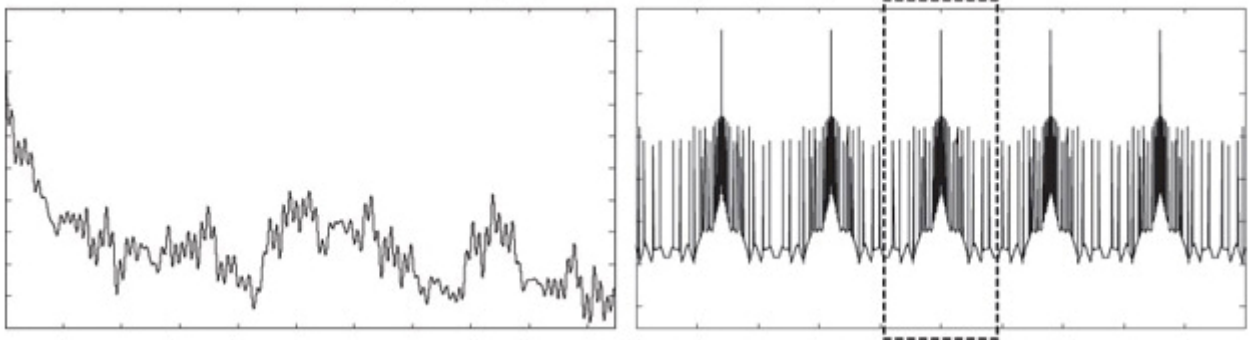


Рисунок 7 – Сигнал після дискретизації

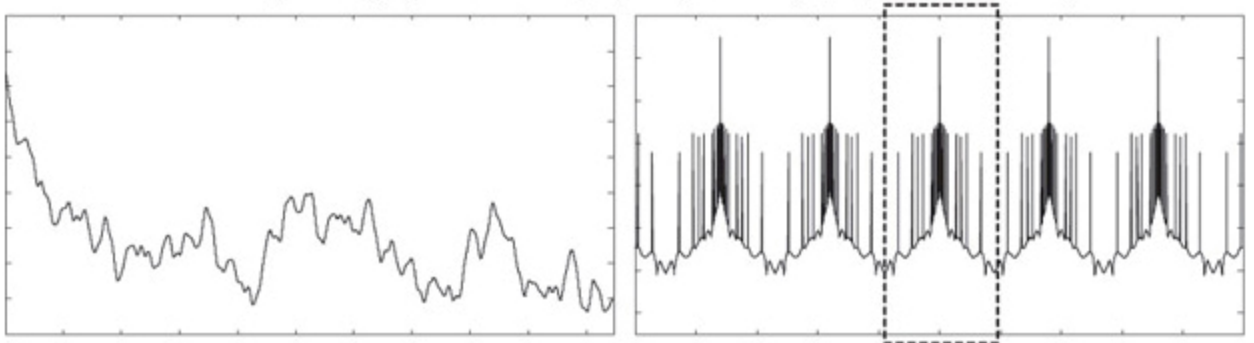


Рисунок 8 – Сигнал після фільтрування

Саме так і працює відомий алгоритм стиснення JPEG. Недоліком такого підходу є те, що за високого ступеня стиснення частини єдиного зображення, що обробляються незалежно один від одного, можуть погано поєднуватися, стає очевидним, що зображення зібране з окремих елементів.

Одним із прикладів є комп'ютерний фільм поганої якості. На ньому можна спостерігати сукупність квадратиків, які утворюють зображення із добре видимими їх контурами. Тоді для усунення цього недоліку, зображення відфільтровують, знімаючи шуми, які породжують таке спотворення. На рис. 6 зображено початковий сигнал зображення як в просторовій, так і в частотній області до косинусної дискретизації, який ми досліджуємо.

Після проведення дискретизації, наш графік набуде вигляду зображеного на рис. 7, на якому ми можемо спостерігати високочастотні

високочастотні шуми, і, порівнявши частотні області до і після дискретизації, ми побачимо велику різницю. Ця різниця буде проявлятися на зображенні у вигляді сукупності контурів зібраних областей. Для того, щоб позбутися цих шумів потрібно їх відфільтрувати і графік сигналу набуде вигляду (рис. 8). Якщо порівняти частотну і просторову область даного сигналу до дискретизації і після фільтрування, ми помітимо, що сигнали майже співпадають, тобто зображення після фільтрування набуде невеликої розмитості і не буде мати такої ж чіткої форми, як початковий зображення, але основна інформація при цьому збережеться.

Ще одне завдання – побудова різного роду сіток. Сітка є зручна для представлення об'єктів найрізноманітнішої структури. У комп'ютерній графіці часто використовуються трикутні сітки, вони відносно прості в обробці, дають можливість представляти об'єкти з високою точністю.

точністю. Крім того, на багатьох графічних станціях обробка трикутників (наприклад, заливка Гуро) підтримується апаратно. Використання рівномірної сітки буває виправдано не завжди – об'єкт може мати як фрагменти з хорошим ступенем точності уявні лише декількома великими трикутниками, так і деталі з складною структурою, які слід представляти можливо дрібнішою сіткою.

Як бачимо, викладки великого французького патріота математика Фур'є, що був сучасником Наполеона, актуальні і досі, коли зростання об'ємів буріння та прискорення темпів проходки свердловин потребує не тільки збільшення кількості бурових установок, але і підвищення їхньої ефективності шляхом зміни не лише їхніх параметрів і конструкцій але й застосування сучасних комп'ютерних технологій та відповідного програмного забезпечення.

Література

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Для вузов. Том 2. – М.: Наука, 1972. – 576 с.

3 Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть IV. – Харьков, 1966. – 236 с.

4 Иванов Д.В., Карпов А.С., Кузьмин Е.П., Лемпицкий В.С., Хропов А.А. Алгоритмические основы растровой машинной графики / Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 286 с.

5 Казиев В.М. . Введение в математику и информатику / Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 304 с.

6 Ильский А.Л., Миронов Ю.В., Чернобыльский А.Г. Расчет и конструирование бурового оборудования. – М.: Недра, 1985. – 452 с.

7 Иткис М.Я. Расчет и конструирование бурового оборудования с применением ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1978. – 262 с.