

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ВЗАЄМОДІЇ МУФТ І ТРУБ У З'ЄДНАННЯХ НАФТОГАЗОВОГО СОРТАМЕНТУ

Є.І.Крижанівський, І.І.Палійчук

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42264,

e-mail: public@nuing.edu.ua

В резьбовом соединении муфты и трубы с уплотнительным узлом возникает сложный комплекс деформационных и силовых параметров упругого взаимодействия участков. Для их расчета использована моментная теория цилиндров с линейно изменяющейся толщиной стенок, для чего найдено общее выражение контактного давления. Для определения параметров сформулированы физико-математические принципы равновесия краевых сечений смежных участков, равновесия контактных давлений, баланса деформаций и натяга на контактных участках. Это позволяет рассчитать параметры упруго-деформированного состояния (смещение, повороты, моменты, силы) для всех участков соединения под действием внутреннего и внешнего давлений.

У процесі видобування нафти і газу застосовують муфтові різьбові з'єднання труб. Муфта і труба пружно взаємодіють своїми кінчними поверхнями з радіальним натягом у різі та в ущільненні. Від цієї взаємодії залежать міцність та герметичність з'єднання.

Муфта і труба є тонкостінними циліндрами з лінійно змінною товщиною стінок. Їх ділянки мають змінні по довжині жорсткість стінок та осесиметричні згини, тому їх розрахунок відрізняється від задачі Ламе та від розрахунку циліндрів з постійною товщиною стінок.

У цій статті сформульовані фізико-математичні принципи розрахунку параметрів пружно-деформованого стану усіх ділянок з'єднання муфти і труби з вузлом ущільнення.

1 Пружні деформації циліндричної стінки лінійно змінної товщини

Муфта і труба мають декілька ділянок, які розрізняють за функціональними і геометричними параметрами (різь, ущільнення, канавка, збіг різі, центр муфти, тіло труби). На кожну ділянку ззовні та зсередини діє розподілений тиск $P(x)$. Це може бути тиск рідини чи газу, постійний у межах з'єднання, або контактний тиск в ущільненні і у різі. Ділянки слугують опорою одна одній у крайових перетинах, де створюють згин країв залежно від їх розмірів, навантаження і деформацій.

Товщина S стінок ділянок лінійно змінна

$$S = x \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (1)$$

де: $\operatorname{tg} \varphi$ – тангенс кута нахилу твірної конічної поверхні до осі; x – координата, яку відраховують від перетину конічної і циліндричної поверхонь, де товщина рівна нулю, у напрямку її збільшення.

In the threaded connection of a pipe and coupling with the sealing box there occurs a complicated set of strain and power characteristics of elastic interaction of sections. The moment theory of rotational shells with the linear variable wall thickness was used to calculate this and the general expression of contact pressure was discovered for the first time. To determine the parameters there have been formulated physical and mathematical principles of equilibrium of edge cross-sections of adjoining sections, equilibrium of contact pressures, balance of strains and tightness on contact sections. It allows to calculate these parameters (radial shifts, slopes, bending moments, transverse forces) of the elastic-strained state for walls of all connection sections under the influence of internal and external pressures.

Осесиметричні деформації кожної ділянки описують диференціальним рівнянням [1; 3]

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \rho^4 w = \rho^4 \frac{R^2}{E \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{P(x)}{x}, \quad (2)$$

де: E і μ – модуль пружності матеріалу і коефіцієнт Пуассона; R – радіус серединної поверхні; w – радіальні зміщення (зміна радіуса) стінки у перетині x ; уведені позначення:

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{12(1-\mu^2)}{R^2(\operatorname{tg} \varphi)^2}}, \quad y = 2\rho\sqrt{x}, \quad D = \frac{E \cdot (x \cdot \operatorname{tg} \varphi)^3}{12 \cdot (1-\mu^2)} \quad (3)$$

Розв'язок $w(x)$ однорідного рівняння (2) з правою частиною, рівною нулю, містить лінійну комбінацію похідних від функцій Бесселя нульового порядку [1;3]

$$w = \frac{C_1 \operatorname{ber}' y + C_2 \operatorname{bei}' y + C_3 \operatorname{ker}' y + C_4 \operatorname{kei}' y}{\sqrt{x}}, \quad (4)$$

де: ' (штрих) – позначає диференціювання за аргументом y ; $C_1 \dots C_4$ – постійні коефіцієнти, які визначають за крайовими умовами; $\operatorname{ber} y, \operatorname{bei} y$ – дійсна і уявна частини функції Бесселя першого роду; $\operatorname{ker} y, \operatorname{kei} y$ – ті ж частини модифікованої функції Бесселя другого роду. Ці функції є у системах програмування MATLAB чи MAPLE, що уможливило їх числовий розрахунок.

За моментною теорією оболонок обертання [1] розв'язок w (4) рівняння (2) дає змогу визначити усі параметри, які описують пружно-деформований стан стінки у перетинах з координатою x , зокрема, у крайових перетинах

$$v = \frac{dw}{dx}, \quad M = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad N = \frac{dM}{dx}, \quad (5)$$

де: v – поворот; M – згинальний момент; N – поперечна (перерізуюча) сила. Детально викладені вирази похідних (5) відомі [1;3] і містять ті ж функції, що й (4).

Параметри w, v, M, N (4-5) діють у стінці циліндра і є осесиметричними, тобто розподілені по колу і спрямованими радіально. Вони отримані з розв'язку однорідного рівняння, тому описують деформований стан стінки лише від параметрів, які діють на ділянку у крайових перетинах з боку суміжних ділянок.

2 Контактний тиск і деформації стінок двох циліндрів, з'єднаних з натягом

Стінки муфти і труби, які з'єднані з нормованим натягом, отримують осесиметричні (кільцеві та осеві згинальні) деформації. Вони не виходять за область застосування моментної теорії і задовільняють рівняння (2). Тому контактний тиск, що виникає у з'єднанні внаслідок цих деформацій, теж задовільняє це рівняння, є осесиметричним, але змінним по довжині [2;3].

Для врахування дії розподіленого тиску $P(x)$ запропоновано частковий розв'язок диференційного рівняння з правою частиною (2). Він формує праву частину і має вигляд

$$w^* = \frac{R^2}{E \cdot tg\varphi} \cdot \frac{P(x)}{x}. \quad (6)$$

Одночасно розв'язок повинен задовільняти рівняння (2) в цілому, а це можливо тільки тоді, коли перший доданок рівняння (2) зникає

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{P(x)}{x} \right) \right) = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) – це умова визначення контактного тиску $P(x)$, запропонована для моментної теорії оболонок обертання вперше [3]. Після інтегрування (7) отримано його загальний вираз

$$P(x) = K_1 \cdot x + K_2 \cdot x^2 + K_3 + K_4 \cdot x \cdot \ln x, \quad (8)$$

де $K_1 \dots K_4$ – постійні коефіцієнти, які визначають за умовами взаємодії контактних ділянок.

Із (6) і (8) одержано вираз радіальних зміщень стінки під дією контактного тиску

$$w^* = \frac{R^2}{E \cdot tg\varphi} \left(K_1 + K_2 \cdot x + K_3 \cdot \frac{1}{x} + K_4 \cdot \ln x \right), \quad (9)$$

звідки відповідно до (5) отримано

$$v^* = \frac{R^2}{E \cdot tg\varphi} \left(K_2 - K_3 \cdot \frac{1}{x^2} + K_4 \cdot \frac{1}{x} \right),$$

$$M^* = \frac{1}{\rho^4} (2K_3 - K_4 \cdot x), \quad N^* = -\frac{K_4}{\rho^4}. \quad (10)$$

Параметри (9-10) – зміна радіуса w^* , поворот v^* , згинальний момент M^* і поперечна сила N^* , викликані у стінці тиском (8), який діє у з'єднанні. Вони отримані з часткового розв'язку рівняння (2) і тому описують деформації ділянки з вільними торцями.

Повний пружно-деформований стан ділянки розраховують як суму відповідних параметрів (4-5) від крайового обпирання на суміжні ділянки та параметрів (9-10) від тисків, які діють на ділянку у з'єднанні.

3 Принцип рівноваги крайових перетинів суміжних ділянок у з'єднанні муфти і труби

Остаточні (результуючі) значення параметрів, які склалися у стінках муфти і труби після з'єднання з натягом та під дією експлуатаційних тисків, визначають окремо для кожної ділянки у заданих перетинах сумою відповідних складових (4-5) і (9-10) за системою

$$\begin{cases} W(x) = w + w^* + w_0, & M(x) = M + M^* + M_0, \\ V(x) = v + v^* + v_0, & N(x) = N + N^*, \end{cases} \quad (11)$$

де w_0, v_0, M_0 – відповідно зміна радіуса, поворот і згинальний момент, які створює у стінці постійний тиск P_0 рідини чи газу. Вони аналогічні складовій з індексом 3 у формулах (8-10).

Після розрахунку складових системи (11) залишаються невідомими постійні коефіцієнти C_i, K_i (4-5, 9-10). Для їх визначення використано фізичний механізм утворення вигинів стінок ділянок – сумісність їх деформацій [1]: стінки у крайовому перетині, спільному для двох ділянок, є нерозривними (суцільними). З цього випливає принцип рівноваги перетинів: результуючі параметри W, V, M, N кожної з двох суміжних ділянок у спільному перетині рівні між собою.

Застосовано індекси: перший – i – вказує дану ділянку; другий – j – суміжну ділянку, на яку оберта i -та: $j = i \pm 1$. Із системи (11) за умовою рівноваги перетинів отримано систему рівнянь, лінійних відносно невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} W_i(x_{i,j}) = W_j(x_{j,i}), & M_i(x_{i,j}) = M_j(x_{j,i}), \\ V_i(x_{i,j}) = V_j(x_{j,i}), & N_i(x_{i,j}) = N_j(x_{j,i}), \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} w_{i,j} + w_{i,j}^* - w_{j,i} - w_{j,i}^* = w_{0,j,i} - w_{0,i,j}, \\ v_{i,j} + v_{i,j}^* - v_{j,i} - v_{j,i}^* = v_{0,j,i} - v_{0,i,j}, \\ M_{i,j} + M_{i,j}^* - M_{j,i} - M_{j,i}^* = M_{0,j,i} - M_{0,i,j}, \\ N_{i,j} + N_{i,j}^* - N_{j,i} - N_{j,i}^* = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для кожного крайового перетину муфти і труби складають по 4 рівняння системи (12), у результаті чого кожна ділянка з'єднання, яка мала 4 невідомих коефіцієнти C_i , отримує 4 рівняння для їх визначення.

4 Принцип рівноваги контактних тисків у з'єднанні муфти і труби з натягом

Після згинчування муфти і труби з натягом на контактних поверхнях (в ущільненні, у різі) виникає контактний тиск. За величиною він такий, щоб розширити муфту і одночасно

звукити трубу для утворення з'єднання. Зсередини на трубу діє внутрішній тиск і збільшує її радіус. На муфту діє зовнішній тиск і зменшує її радіус. Від цих тисків контактний тиск збільшується. У результаті у з'єднанні встановлюється рівновага між деформаціями і контактними тисками, які створені натягами згинчування та діючими тисками.

Щоб знайти невідомі коефіцієнти K_i , використано фізичний механізм утворення пружного з'єднання з натягом. Він полягає у тому, що на контактних ділянках муфти і труби взаємна радіальна дія їх стінок одна на одну однакова за величиною і протилежна за напрямком. Звідси сформульовано принцип рівноваги контактних тисків: сума значень цих тисків дорівнює нулю у кожному перетині вздовж контактної ділянки. Математичний вираз цієї умови такий

$$P_m(x_m) + P_t(x_t) = 0, \quad (13)$$

де: m і t – індекси належності параметра до муфти і труби; x_m і x_t – координати одного перетину з'єднання, але у власних системах відліку; $P_m(x_m)$ і $P_t(x_t)$ – значення контактного тиску у цьому перетині окремо для муфти і труби.

Ці координати і функції були виражені через одну змінну X у загальній системі координат з початком у площині симетрії згинченого з'єднання (у центрі муфти). Для функцій застосовано розкладання у степеневий ряд Тейлора за похідними [2]. Рівняння (13) набуло вигляду

$$P_m(X) + P_t(X) = \{P_{mC} + P_{tC}\} - \quad (14)$$

$$- (X - X_C) \{P'_{mC} - P'_{tC}\} + \frac{1}{2} (X - X_C)^2 \{P''_{mC} + P''_{tC}\} - \frac{1}{6} (X - X_C)^3 \{P'''_{mC} - P'''_{tC}\} + \frac{1}{24} (X - X_C)^4 \{P^{IV}_{mC} + P^{IV}_{tC}\} = 0,$$

де C – індекс, що позначає значення параметра у перетині середини ділянки; похідні від тиску, отримані диференціюванням виразу (8)

$$P'(x) = K_1 + 2xK_2 + K_4(\ln x + 1), P''(x) = -x^{-2}K_4, \quad (15)$$

$$P'''(x) = 2K_2 + x^{-1}K_4, \quad P^{IV}(x) = 2x^{-3}K_4.$$

Рівняння рівноваги тисків (13) повинне виконуватись на усій довжині контактної ділянки незалежно від координати X . Тому умова (14) виконується тоді, коли кожний вираз у фігурних дужках рівний нулю. Для цього застосовано вирази похідних (15) і отримано систему лінійних рівнянь відносно K_i

$$\begin{aligned} & x_{mC}K_{1m} + x_{mC}^2K_{2m} + 1 \cdot K_{3m} + x_{mC} \ln x_{mC} \cdot K_{4m} + \\ & + x_{tC}K_{1t} + x_{tC}^2K_{2t} + 1 \cdot K_{3t} + x_{tC} \ln x_{tC} \cdot K_{4t} = 0, \\ & 1 \cdot K_{1m} + 2x_{mC}K_{2m} + 0 \cdot K_{3m} + (\ln x_{mC} + 1)K_{4m} - \\ & - 1 \cdot K_{1t} - 2x_{tC}K_{2t} - 0 \cdot K_{3t} - (\ln x_{tC} + 1)K_{4t} = 0, \\ & 2 \cdot K_{2m} + x_{mC}^{-1}K_{4m} + 2 \cdot K_{2t} + x_{tC}^{-1}K_{4t} = 0, \\ & -K_{4m} \cdot x_{mC}^{-2} + K_{4t} \cdot x_{tC}^{-2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отже, за умовою рівноваги тисків можна скласти 4 рівняння з необхідних 8 для кожної контактної ділянки з'єднання.

5 Принцип балансу натягу і деформацій стінок на контактних ділянках з'єднання

У роз'єданому стані з'єднання радіус контактної поверхні труби перевищує радіус муфти на величину радіального натягу Δ . У процесі згинчування труба входить у муфту і пружно розтискає її, а муфта пружно стискає трубу. Між їх поверхнями утворюється щільний фізичний контакт.

Фізичний механізм утворення з'єднання з натягом полягає у тому, що радіальне зміщення W_m стінки муфти не може стати більшим за натяг Δ , зменшений на звуження W_t труби. З іншого боку, щоб існував контакт, стінка труби не може радіально звужитись більше, ніж на натяг Δ , зменшений на розширення W муфти.

Звідси сформульовано принцип балансу деформацій і натягу: сума зміщень стінок муфти W (додатних) і труби W_t (від'ємних) у з'єднанні дорівнює радіальному натягу Δ у будь-якому перетині контактної ділянки. Математичний вираз цієї умови такий

$$W_m(x_m) - W_t(x_t) = \Delta, \quad (17)$$

де: x_m, x_t – координати даного перетину у власних системах відліку; $W_m(x_m), W_t(x_t)$ – зміщення стінок муфти і труби у цьому перетині.

Рівняння (13) і (17) математично аналогічні. Тому для розв'язання рівняння (17) повністю використали методику, розроблену у п. 4. Замість функцій $P(x)$ у (17) застосували розклади Тейлора для функцій $W(x)$ параметрів стінки (11). Їх підставили в умову (17), де згруппували доданки з однаковими степенями X

$$\begin{aligned} & W_m(x_m) - W_t(x_t) = \{W_{mC} - W_{tC}\} - \\ & - (X - X_C) \{W'_{mC} + W'_{tC}\} + \frac{1}{2} (X - X_C)^2 \times \\ & \times \{W''_{mC} - W''_{tC}\} - \frac{1}{6} (X - X_C)^3 \{W'''_{mC} + W'''_{tC}\} + \dots = \Delta. \end{aligned} \quad (18)$$

Перші фігурні дужки містять суму зміщень стінок муфти і труби посередині ділянки, яка рівна натягу Δ . Інші фігурні дужки у (18) рівні нулю, у них підставлені похідні від $W(x)$ та отримано систему рівнянь у загальному вигляді

$$\begin{aligned} & w_{mC} + w_{*mC} - w_{tC} - w_{*tC} = \Delta - w_{0mC} + w_{0tC}, \\ & w'_{mC} + w'_{*mC} + w'_{tC} + w'_{*tC} = -w'_{0mC} - w'_{0tC}, \\ & w''_{mC} + w''_{*mC} - w''_{tC} - w''_{*tC} = -w''_{0mC} + w''_{0tC}, \\ & w'''_{mC} + w'''_{*mC} + w'''_{tC} + w'''_{*tC} = -w'''_{0mC} - w'''_{0tC}. \end{aligned} \quad (19)$$

Складові рівнянь (19) і їх похідні знайдені з (4-5) і (9-10). Система (19) дає ще 4 необхідних рівняння, лінійних відносно коефіцієнтів K_i , для кожної контактної ділянки з'єднання.

Розрахунок функцій Бесселя, складових параметрів (4-5, 9-10) і їх похідних, розв'язок системи рівнянь (12, 16, 19) запрограмовані у середовищі MATLAB. Зреалізована комп'ютерна програма дає змогу знайти і графічно відобразити контактний тиск і параметри пруж-

жно-деформованого стану різьбового з'єднання муфт і труб з вузлом ущільнення.

Висновки

У різьбовому з'єднанні муфти і труби з вузлом ущільнення виникає пружна взаємодія їх ділянок з складним комплексом деформаційних і силових параметрів. Для їх розрахунку застосовано моментну теорію циліндрів з лінійно змінною товщиною стінок, для чого знайдено загальний вираз контактної тиску. Для визначення параметрів сформульовано фізико-математичні принципи рівноваги крайових перетинів суміжних ділянок, рівноваги контактних тисків, балансу деформацій і натягу на контактних ділянках. Це дозволяє розрахувати параметри пружно-деформованого стану (зміщення, повороти, моменти, сили) для усіх ділянок з'єднання під дією внутрішнього і зовнішнього тисків.

Література

1 Flugge W. Statik und Dynamik der Schalen. – Berlin: Springer – Verlag, 1957.

2 Крижанівський Є.І., Палійчук І.І. Метод розрахунку контактної тиску для муфти і труби, з'єднаних з натягом // Нафтогазова енергетика. – 2008. – № 1 (6). – С.78-82.

3 Палійчук І.І. Пружна взаємодія з'єднаних з натягом циліндрів із змінною товщиною стінки // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2006. – № 2 (19). – С.59-63.