УДК 628.5.66

МЕТОД СИНТЕЗУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РІВНЯ ВОДИ У р. ДНІСТЕР ЗАЛЕЖНО ВІД ПОГОДНИХ УМОВ

М.І.Горбійчук, О.В.Пендерецький

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел.(0342) 504521
e-mail: g o r b @ n u n g . e d u . u a

Розроблено новий метод синтезу математичних моделей складних екологічних процесів, який ґрунтується на теорії генетичних алгоритмів. Синтез моделей здійснюється поетапно. На першому етапі із процесу виділяється гармонічна складова з некратними частотами, а на другому – модель процесу шукається у вигляді полінома певної степені. Ефективність методу підтверджена моделюванням зміною рівня води у р. Дністер залежно від погодних умов.

Ключові слова: метод синтезу, математична модель, екологічний процес, теорія генетичних алгоритмів, рівень води

Разработан новый метод синтеза математических моделей сложных экологических процессов, который основывается на теории генетических алгоритмов. Синтез моделей осуществляется поэтапно. На первом этапе из процесса выделяется гармоническая составляющая с некратными частотами, а на втором – модель процесса ищется в виде полинома определенной степени. Эффективность метода подтверждена моделированием изменением уровня воды в р. Днестр в зависимости от погодных условий.

Ключевые слова: метод синтеза, математическая модель, экологический процесс, теория генетических алгоритмов, уровень воды

The new method of synthesis of mathematical models of difficult ecological processes is developed, which is based on the theory of genetic algorithms. The synthesis of models is carried out stage-by-stage. On the first stage from a process a harmonic constituent is selected with aliquant frequencies, and on the second – the model of process is searched as a polynomial of certain degree. Efficiency of method is confirmed by a design the change of water level of Dniester river depending on weather terms.

Keywords: method of synthesis, mathematical model, ecological process, theory of genetic algorithms, water level

Газотранспортна мережа України включає близько 35 тис. км газопроводів, 71 компресорну станцію загальною потужністю 5,4 млн. кВт. Важливою складовою газотранспортної мережі нашої держави є управління магістральних газопроводів "Прикарпаттрансгаз", яке в своєму складі має 18 компресорних станцій загальною продуктивністю 380×106 нм3/добу.

Через річку Дністер також прокладені газопроводи такі, як: газопровід "Союз (с. Коропець, Тернопільська область), газопровід "Прогрес" та газопровід "Уренгой-Помари-Ужгород" (с. Михальче, Івано-Франківська область).

Тому, для забезпечення надійної та безаварійної роботи газопроводів, що проходять через річку Дністер, важливе значення має прогнозування його паводків. Часто паводки призводять до розмивання берегів, що може викликати пошкодження газопроводу "Торжок-Долина" (Івано-Франківська область), який прокладено біля русла р. Дністер.

Емпіричне моделювання складних об'єктів ґрунтується на методі найменших квадратів, за допомогою якого при відомій структурі моделі визначають її параметри. Але при цьому залишалось відкритим питання про вибір самої структури моделі. А. Г. Івахненком та його учнями було доказано [1], що ця проблема може бути розв'язана, якщо в основу синтезу моделей складних об'єктів покласти геделівський підхід: тільки зовнішні критерії (критерії селекції), які використовують зовнішню інформацію, дають можливість побудувати адекватну модель при наявності даних з високим рівнем шумів. Структуру моделі визначають на зовнішньому критерієві таким чином, щоб він набув мінімального значення. Отриману у такий спосіб модель називають моделлю оптимальної складності, а сам метод синтезу таких моделей носить назву індуктивного методу самоорганізації моделей [1].

Реалізація індуктивного методу самоорганізації моделей здійснюється поетапно: перший етап – генерація моделей-претендентів (у певному порядку підвищення складності); другий етап – відбір найкращої моделі за вибраним критерієм селекції.

Розрізняють три способи генерації моделей-претендентів. Перший із них комбінаторний метод, який вибирає модель шляхом прирівнювання до нуля деяких її коефіцієнтів. Таким чином, отримуємо сукупність моделей. Вибір найкращої моделі здійснюється на основі одного із критеріїв селекції. Другий спосіб відомий як метод групового врахування аргументів (МГУА), у якому генерація моделей здійснюється на основі багаторядної процедури. Третій метод подібний до другого. Різниця лише у тому, що на кожному ряді селекції часткові моделі утворюють шляхом прирівнювання до нуля певного числа їх коефіцієнтів.

Недоліком комбінаторного методу селекції моделей є необхідність перебору великого числа моделей. Якщо вихідною моделлю вибраний

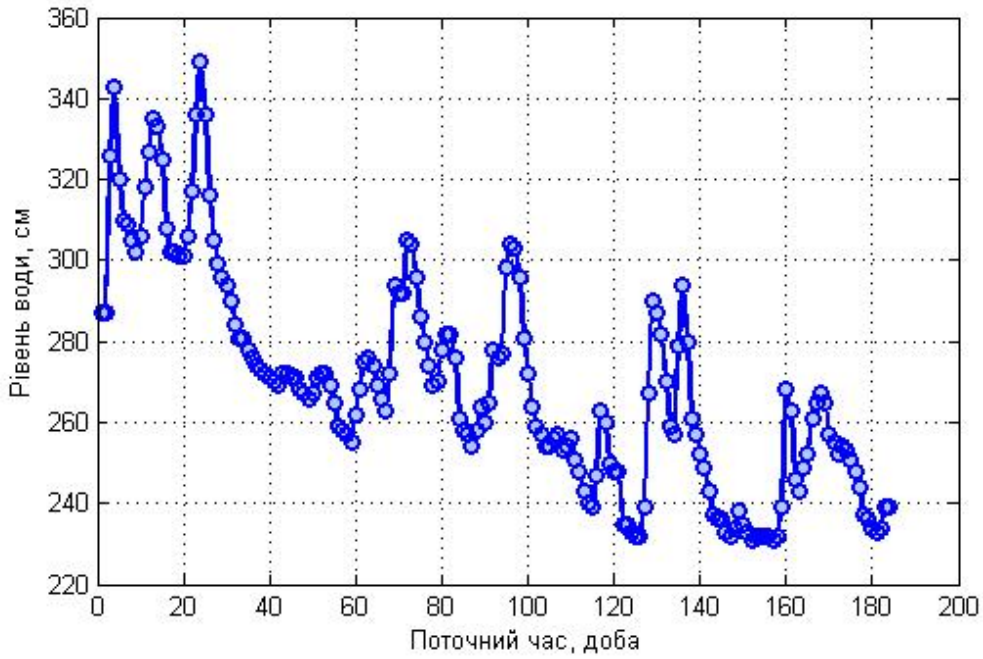

Рисунок 1 – Зміна рівня води у р. Дністер за період з 1.04 по 31.08.2009 року

повний поліном степені m, то загальне число моделей-претендентів складає $2^M - 1$, де M – загальне число членів повного полінома степеня m. Навіть сучасні ЕОМ не здатні реалізувати такі алгоритми при значному числові змінних і високій степені полінома. МГВА породжує моделі, у яких фігурують проміжні змінні кожного із рядів селекції, що значно утруднює процес переходу до вхідних змінних системи, що моделюється. Сказане відноситься і до третього методу, оскільки він по суті справи є модифікацією МГВА.

Із усіх трьох методів найпривабливішим є комбінаторний метод, оскільки він дає можливість отримати модель, де аргументами виступають вхідні величини системи.

Метою даної роботи є розробка методу синтезу моделей об'єктів великої складності на засадах генетичних алгоритмів, який на відміну від комбінаторного методу, дає можливість у значній мірі зняти проблему великої розмірності обчислювальної процедури. Реалізацію розробленого методу показано на прикладі побудови математичної моделі рівня води у р. Дністер у залежності від погодних умов.

У 2009 р. велись спостереження за рівнем води р. Дністер у районі с. Нижнів Івано-Франківської обл. з 1.04 по 31.08. За цей же період збирались дані про температуру повітря, кількість опадів, середню швидкість вітру та середньодобовий барометричний тиск.

На рис. 1 зображено графік зміни рівня води у р. Дністер за вказаний період, аналіз якого засвідчує, що з часом має місце тренд $h(t)$, який носить лінійний характер, та існує гармонічна складова $G(t)$ зумовлена сезонною зміною метеорологічних умов [2], тобто

$$\tilde{H}_t = H_t + G(t) + h(t), \qquad (1)$$

де: $\tilde{H}_t$ – поточний рівень води, *см*;

$G(t)$ – гармонічна складова рівня води, *см*;

$h(t)$ – лінійний тренд, *см*.

Складову $G(t)$ подамо у вигляді гармонічного ряду [1] з некратними частотами

$$G(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{m} \left(A_j \, sin(t\omega_j) + B_j \, cos(t\omega_j) \right), \qquad (2)$$

де: t – такти відліку часу, $t = 1, 2, 3, \ldots, N$;

A_0, A_j, B_j – параметри гармонічного ряду (2);

$\omega_j = \omega_{j-1} + \Delta\omega_j$ – некратні частоти, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Для того, щоб за спостереженнями $\tilde{H}_t - h(t)$ можна було б оцінити параметри ряду (2) необхідно виконання умови [1] $N \geq 3m + 1$.

Суму декількох гармонік ряду (2), у якому коефіцієнти A_0, A_j, B_j визначені за методом найменших квадратів, а число гармонік і їх частоти вибрані так, щоби отримати мінімум деякого зовнішнього критерію селекції називають [1] гармонічним трендом оптимальної складності.

Виберемо деяку фіксовану точку $t = i$ і довільне p. Запишемо:

$$g(i+p) = \qquad (3)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(A_j \sin((i+p)\omega_j) + B_j \cos((i+p)\omega_j) \right);$$

$$g(i-p)= \quad (4)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(A_j \sin\left((i-p)\omega_j\right)+B_j \cos\left((i-p)\omega_j\right)\right).$$

Знайдемо суму функцій (3) і (4), Використовуючи відомі тригонометричні співвідношення [3], знайдемо суму функцій (3) і (4),

$$g(i+p)+g(i-p)= \quad (5)$$
$$=2\sum_{j=1}^{m}\left(A_j \sin\left(i\omega_j\right)+B_j \cos\left(i\omega_j\right)\right)\cos\left(p\omega_j\right).$$

Візьмемо суму за всіма $p=\overline{0,m-1}$ від лівої і правої частин рівняння (5) з ваговими коефіцієнтами α_p

$$\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p\left(g(i+p)+g(i-p)\right)=$$
$$=\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p 2\sum_{j=1}^{m}\left(A_j \sin\left(i\omega_j\right)+B_j \cos\left(i\omega_j\right)\right)\cos\left(p\omega_j\right).$$

У правій частині останньої рівності змінимо порядок взяття суми

$$\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p\left(g(i+p)+g(i-p)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(A_j \sin\left(i\omega_j\right)+B_j \cos\left(i\omega_j\right)\right)\times \quad (6)$$
$$\times\left(2\alpha_0+\sum_{p=1}^{m-1}2\alpha_p \cos\left(p\omega_j\right)\right).$$

Вагові коефіцієнти α_p виберемо таким чином [1], щоб задовольнялась умова

$$\alpha_0+\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_p \cos\left(p\omega_j\right)=\cos\left(m\omega_j\right),\ j=\overline{1,m}. \quad (7)$$

Знайдемо

$$g(i+m)+g(i-m)= \quad (8)$$
$$=2\sum_{j=1}^{m}\left(A_j \sin\left(i\omega_j\right)+B_j \cos\left(i\omega_j\right)\right)\cos\left(m\omega_j\right).$$

Порівнюючи між собою рівняння (6) і (8) та враховуючи рівняння (7), отримаємо

$$\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p\left(g(i+p)+g(i-p)\right)= \quad (9)$$
$$=g(i+m)+g(i-m).$$

Величина

$$b_i=g(i+m)- \quad (10)$$
$$-\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p\left(g(i+p)+g(i-p)\right)+g(i-m),$$
$$i=\overline{m+1,N-m}$$

характеризує точність, з якою коливний процес виражається через задану суму гармонічних складових. Іншими словами, значення функції $g(t)$ у моменти часу, що симетрично розміщені відносно довільної точки i, повинні задовольняти отриманому рівнянні балансу (9). Якщо ця умова виконується, то $b_i=0$.

Рівняння (7) для довільної частоти

$$\alpha_0+\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_p \cos(p\omega)=\cos(m\omega)$$

за допомогою рекурентного співвідношення [1]

$$cos(p\omega)=2cos\left((p-1)\omega\right)cos\,\omega-cos\left((p-2)\omega\right),$$
$$p=\overline{2,m}$$

приводиться до алгебраїчного рівняння m-ної степені відносно $cos\,\omega$

$$P_m z^m+P_{m-1}z^{m-1}+\ldots+P_1 z+P_0=0, \quad (11)$$

де $z=cos\,\omega$.

Рівняння (11) має m коренів, які однозначно визначають частоти ω_j, $j=\overline{1,m}$.

Таким чином, для знаходження параметрів A_0, A_j, B_j і ω_j, $j=\overline{1,m}$ гармонічного тренда необхідно спочатку визначити вагові коефіцієнти α_p. Балансові коефіцієнти знаходять [1] із умови мінімізації нев'язки

$$B=\sum_{i=m+1}^{N-m}b_i^2, \quad (12)$$

де b_i визначається рівнянням (10), у якому величини g відповідних дискретних аргументів замінені на $\overline{g}_t=\tilde{H}_t-h(t)$.

Отже, будемо розв'язувати задачу

$$\min_{\bar{\alpha}}: J(\bar{\alpha})=\sum_{i=m+1}^{N-m}\left(z_{i,m}-\sum_{p=0}^{m-1}\alpha_p g_{i,p}\right)^2, \quad (13)$$

де: $\bar{\alpha}=\left(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}\right)^T$ - вектор вагових коефіцієнтів;

$z_{i,m}=\overline{g}(i+m)+\overline{g}(i-m)$;

$g_{i,p}=\overline{g}(i+p)+\overline{g}(i-p)$;

T – символ транспонування матриць.

Задачу (13) запишемо у матрично-векторній формі

$$\min_{\bar{\alpha}}: J(\bar{\alpha})=\left(\bar{z}_m-F_m\bar{\alpha}\right)^T\left(\bar{z}_m-F_m\bar{\alpha}\right), \quad (14)$$

де $\bar{z}_m=\begin{bmatrix}\overline{g}(2m+1)+\overline{g}(1)\\ \overline{g}(2m+2)+\overline{g}(2)\\ \ldots\\ \overline{g}(N)+\overline{g}(N-2m)\end{bmatrix}$,

$$F_m = \begin{bmatrix} 2\bar{g}(m+1) & \bar{g}(m+2)+\bar{g}(m) & \bar{g}(m+3)+\bar{g}(m-1) & \dots & \bar{g}(2m)+\bar{g}(2) \\ 2\bar{g}(m+2) & \bar{g}(m+3)+\bar{g}(m+1) & \bar{g}(m+4)+\bar{g}(m) & \dots & \bar{g}(2m+1)+\bar{g}(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\bar{g}(N-m) & \bar{g}(N-m+1)+\bar{g}(N-m-11) & \bar{g}(N-m+2)+\bar{g}(N-m-2) & \dots & \bar{g}(N-1)+\bar{g}(N-2m+1) \end{bmatrix}.$$

Мінімізація виразу (14) приводить до нормального рівняння Гаусса, яке у матричній формі матиме такий вигляд:

$$F_m^T F_m \bar{\alpha} = F_m^T \bar{z}_m . \qquad (15)$$

Із останнього рівняння можна знайти

$$\bar{\alpha} = \left(F_m^T F_m\right)^{-1} F_m^T \bar{z}_m . \qquad (16)$$

Використовувати формулу (16) можна лише тоді, коли розмірність вектора $\bar{\alpha}$ невелика і матриця $F_m^T F_m$ є добре обумовленою. Якщо така умова не виконується, то для знаходження $\bar{\alpha}$ слід розв'язувати рівняння (15) одним із числових методів, наприклад, методом Гауса зі зворотнім ходом [4].

Знаючи вагові коефіцієнти α_p, можемо скласти рівняння (11), розв'язок якого відносно z дає змогу однозначно визначити частоти гармонік ω_j, $j = \overline{1,m}$. Тепер задача полягає в оптимальному синтезі гармонічного ряду (2).

Відомі два підходи [1] до вирішення поставленої задачі. Перший з них передбачає викреслювання гармонік у різних комбінаціях із повного ряду ω_j, $j = \overline{1,m}$.

Другий метод ґрунтується на ідеях багаторядних алгоритмів групового урахування аргументів (МГУА). У відповідності з цим методом число гармонік, що включаються у модель, постійно зростає до тих пір поки це приводить до зменшення критерію селекції. Найпростішим є алгоритм з послідовним виділенням найкращої моделі у кожному ряду. Але ефективнішим є алгоритм, коли виділяється кілька гармонік у кожному ряду. Нехай отримана деяка реалізація вихідної величини процесу довжиною N. Деяка частина цих даних, яка вміщує N_R послідовних точок спостережень виділяється у навчальну послідовність. Інші точки розбиваються на дві частини: перша N_Q – перевірочна і друга N_S – екзаменаційна. Всього точок: $N = N_R + N_Q + N_S$. На першому ряді селекції за всіма заданими точками виділяються всі можливі тренди гармонічного ряду; максимальне число трендів [1] $m_{max} \le \frac{N}{3}$. Із них вибирається не єдиний тренд, а q трендів, які у найбільшій степені задовольняють вибраному критерію селекції. Після цього обчислюється q залишків (залишком називають різницю ординат коливного процесу і кожного із трендів першого ряду). На другому ряду селекції із кожного залишку знову виділяється q_1 трендів. Із всієї множини qq_1 отриманих трендів другого ряду за тим же критерієм селекції вибирається q кращих трендів цього ряду і т. д. Величину свободи вибору q рекомендується вибирати на основі ряду проб, а вибір кращих трендів здійснюється за точками окремої перевірної послідовності. Складність моделі (число рядів селекції) збільшується до тих пір, поки зменшується величина критерію селекції. На останньому ряді селекції вибирається єдиний розв'язок, який відповідає мінімуму критерію селекції.

Недоліком першого підходу до вирішення поставленої задачі є необхідність перебору великого числа варіантів, яке визначається як сума $S_v = \sum_{i=1}^{m} C_m^i$. Відомо, що

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = a^n + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i .$$

Якщо $a = b = 1$, то $\sum_{i=1}^{m} C_m^i = 2^m - 1$. Отже, $S_v = 2^m - 1$. Наприклад, при $m = 20$ необхідно перебрати 1048575 варіантів, що потребує значних затрат машинного часу. Для другого підходу характерним є те, що у результаті реалізації багаторядного алгоритму МГУА неможливо отримати математичну модель у явному вигляді і це є суттєвим недоліком такого методу.

Нами запропонований інший підхід побудови математичних моделей коливних процесів, який базується на ідеях генетичних алгоритмів. Суть такого підходу у наступному.

Вся реалізація вихідної величини процесу або явища розбивається на три частини у такій пропорції [5]: $N_R = 0,7N$, $N_Q = 0,2N$ і $N_S = 0,1N$. Для множини даних $N_R + N_Q$ визначаються вагові коефіцієнти α_p як розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння (15) за методом виключення Гауса з вибором головного елементу [4]. Розв'язок рівняння (11) відносно змінної z дає можливість знайти частоти ω_j, $j = \overline{1,m}$. За відомими частотами ω_j на множині точок $N + N$ необхідно знайти параметри моделі (2) A_0, A_j і B_j. Поставлену задачу будемо розв'язувати, використовуючи генетичні алгоритми [6]. Утворимо упорядковану структуру довжиною m, в якій на i-ому місці буде стояти нуль або одиниця в залежності від того чи частота ω_j вилучена із вибраного повного ряду m чи залишена. У теорії генетичних ал-

горитмів така упорядкована послідовність носить назву хромосоми або особі, а атомарний елемент хромосоми (одиниця або нуль) – це ген. Набір хромосом утворює популяцію. Важливим поняттям у теорії генетичних алгоритмів є функція пристосування, яка визначає ступінь пристосування окремих осіб у популяції. Вона дає змогу із всієї популяції вибрати особі, які є найбільш пристосованими, тобто такі, які мають найбільше (найменше) значення функції пристосування. У задачі синтезу моделей коливних процесів функцією пристосованості виступає комбінований критерій селекції [7]

$$\rho = \sqrt{n_d^2 + B^2}\,, \qquad (17)$$

де: n_d^2 – критерій зміщення, який обчислюється за такою формулою:

$$n_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(g_i(R) - g_i(S)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\overline{g}_i^2}; \qquad (18)$$

B – функція нев'язки, що визначається як (12);

$g_i(R)$, $g_i(S)$ – величини, значення яких обчислені відповідно на множині точок N за формулою (2), а коефіцієнти моделі (2) знайдені відповідно на множинах $N_R + N_Q$ і N_S.

Таким чином, задачу синтезу моделі коливного процесу сформуємо наступним чином: із початкової популяції хромосом шляхом еволюційного відбору вибрати таку, хромосому, яка забезпечує найкраще значення функції пристосування (мінімальне значення критерію селекції (18)).

Генетичний алгоритм складається із наступних кроків [6].

К1. Формування початкової популяції (ініціалізація). На першому кроці роботи алгоритму випадковим чином формується популяція із I осіб, кожна із яких є хромосомою довжиною m.

К2. Оцінка пристосованості хромосоми у популяції. Для кожної хромосоми обчислюється критерій селекції (18). Здійснюється така процедура наступним чином. У відповідності з моделлю (2) формується матриця (19).

У сформованій хромосомі подвоюємо одиниці і нулі. Наприклад, якщо згенерована на першому кроці хромосома була такою: $Ch = [1\,0\,0\,1\,0\,1\,1]$, то після виконання операції подвоєння вона набуде такого вигляду:

$$Ch_d = [11\,00\,00\,11\,00\,1111].$$

Оскільки у моделі (2) завжди присутній коефіцієнт A_0, то до хромосоми Ch на першу позицію добавляємо одиничний ген. У результаті отримаємо $Ch_{do} = [111\,00\,00\,11\,00\,1111]$.

Необхідність операції подвоєння пояснюється тим, що кожній частоті ω_j відповідає пара коефіцієнтів A_j, B_j. У відповідності до сформованої хромосоми Ch_o із матриці F формуємо нову матрицю F_{new} шляхом вилучення тих стовпців із матриці F, які асоційовані із нулями хромосоми Ch. Із отриманої матриці утворимо дві матриці F_A і F_B розмірами $\left(N_R + N_Q\right)\times m_1$ і $N_S \times m_1$. Матрицю F_R утворюють перші $N_R + N_Q$ стовпці матриці F_{new}, а другу – останні N_S стовпі матриці F. На множинах точок $N_R + N_Q$ і N_S обчислюються ненульові коефіцієнти A_0, A і B моделі (2) шляхом розв'язку нормального рівняння Гауса

$$F_R^T F_R \overline{A}_R = F_R^T \overline{g}_R, \qquad (20)$$

$$F_S^T F_S \overline{A}_S = F_S^T \overline{g}_S, \qquad (21)$$

де:

$$\overline{A} = \left(A_0^{(\ )}, A_1^{(\ )}, B_1^{(\ )}, A_2^{(\ )}, B_2^{(\ )}, \ldots A_{m_1}^{(\ )}, B_{m_1}^{(\ )},\right)^T,$$

$$\overline{A}_S = \left(A_0^{(S)}, A_1^{(S)}, B_1^{(S)}, A_2^{(S)}, B_2^{(S)}, \ldots A_{m_1}^{(S)}, B_{m_1}^{(S)},\right)^T$$ - вектори параметрів моделі, яка асоційована з черговою хромосомою із початкової популяції і обчислені за формулами (20) і (21);

$$\overline{g}_R = \left(\overline{g}^{(1)}, \overline{g}, ^{(2)}, \ldots, \overline{g}^{\left(N_R+N_Q\right)}\right)^T,$$

$$\overline{g}_S = \left(\overline{g}^{(1)}, \overline{g}, ^{(2)}, \ldots, \overline{g}^{(N_S)}\right)^T$$ – вектори експериментальних даних на множині точок $N_R + N_Q$.і N_S.

За відомою сукупністю коефіцієнтів $\overline{A}_R$ і $\overline{A}_S$ моделі (2) на множині точок N обчислюють

$$g(R) = F_{new}\overline{A}_R, \quad g(S) = F_{new}\overline{A}_S.$$

За формулою (17) обчислюють критерій селекції, де B знаходять у відповідності з (10) і (12). Значення критерію селекції обчислюють для кожної хромосоми і в результаті отримують множину значень ρ_i, $i = \overline{1, M}$, де M – кількість хромосом у популяції.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \sin\omega_1 & \cos\omega_1 & \sin\omega_2 & \cos\omega_2 & \ldots & \sin\omega_m & \cos\omega_m \\ 1 & \sin(2\omega_1) & \cos(2\omega_1) & \sin(2\omega_2) & \cos(2\omega_2) & \ldots & \cos(2\omega_m) & \cos(2\omega_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \sin(N\omega_1) & \cos(N\omega_1) & \sin(N\omega_2) & \cos(N\omega_2) & \ldots & \cos(N\omega_m) & \cos(N\omega_m) \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

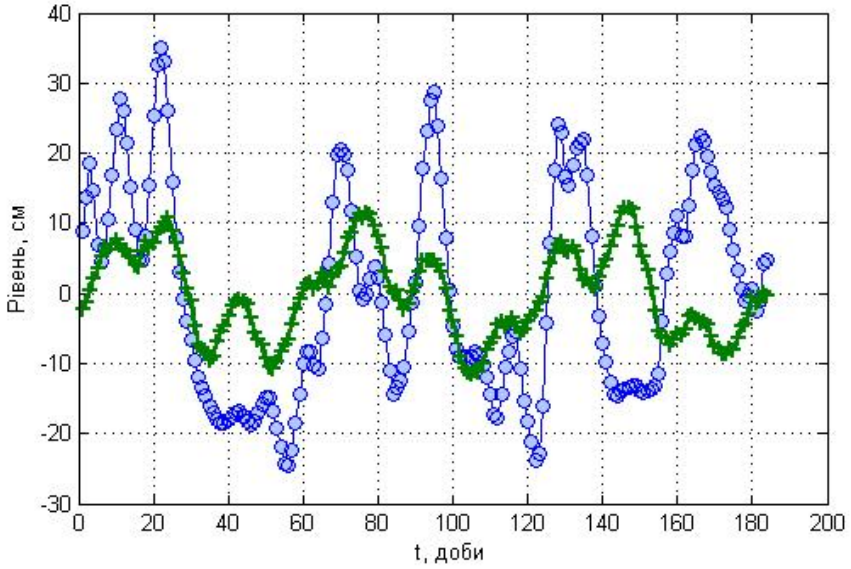

Рисунок 2. – Гармонічний тренд коливного процесу (р. Дністер)

К3. Перевірка умови зупинки алгоритму. Визначають

$$\rho_{\min} = \min_{i \in M} \rho_i . \qquad (22)$$

Якщо мінімальне значення (22) критерію селекції (17) не перевершує деякого додатного значення ε, то відбувається зупинка алгоритму. Зупинка алгоритму також може відбутися у випадку, коли його виконання не приводить до покращення функції пристосування або у тому випадку, коли алгоритмом уже виконано задане число ітерацій.

Після виконання однієї із трьох умов із популяції вибирається хромосома ch^*, для якої виконується умова (22). Після операції подвоєння і приєднання одиничного гену до хромосоми Ch_d^* отримуємо $-Ch_{do}^*$ Ця хромосома задає структуру моделі оптимальної складності і формує матрицю F^* таким чином, що із початкової матриці F вилучаються стовпці, які асоційовані з нульовими генами хромосоми Ch_{do}^*. Перерахунок параметрів моделі (2) здійснюється на множині всіх точок початкового масиву даних.

К4. Селекція хромосом. За розрахованими на другому кроці значеннями функції пристосування здійснюється відбір тих хромосом, які будуть брати участь в створенні потомків для наступної популяції. Такий вибір проводиться у відповідності з принципом природного відбору, коли найбільші шанси у створенні нової популяції мають хромосоми з найкращим значенням функції пристосування, тобто такі, що забезпечують мінімальне значення критеріїв селекції (17).

Найбільш поширеними методами селекції [6] є метод рулетки і метод турнірної селекції.

Турнірний метод можна використовувати як у задачах максимізації, так і у задачах мінімізації функцій. при турнірній селекції всі хромосоми розбиваються на підгрупи з наступним вибором із кожної утвореної підгрупи хромосоми з найкращою пристосованістю. Підгрупи можуть мати довільний розмір, але частіше за все популяції ділять на підгрупи по 2 – 3 особі у кожній. На рис. 2 зображено схему, яка ілюструє турнірний метод селекції для підгруп із z осіб.

К5. Формування нової популяції потомків здійснюється за допомогою двох основних операторів: схрещування і мутації. Слід відмітити, що оператор мутації відіграє другорядну роль у порівнянні з оператором схрещування. Це означає, що у генетичному алгоритмі схрещування проводиться майже завжди, а мутація – досить рідко. Вірогідність схрещування досить велика ($0,5 \le P_c \le 1$), тоді як ймовірність мутації вибирається досить малою ($0 \le P_m \le 0,1$)

Оператор мутації з ймовірністю P_m змінює значення гена в хромосомі на протилежне, тобто з 1 на 0 чи з 0 на 1. Ймовірність мутації P_m може емалюватись випадковим чином випадковим вибором числа із інтервалу [0;1] для кожного гена і відбором для виконання цієї операції тих генів, для яких розігране число виявиться меншим аби рівним P_m. Мутація може здійснюватись як над пулом родичів, так і над пулом потомків.

Оператор схрещування складається із двох етапів. На першому етапі формуються підгрупи із z осіб звідки вибирається найкраща хромосома за критерієм селекції $R\left(Ch_{do}^*\right) = \min_i R\left(Ch_{do,i}\right)$. У результаті отримуємо нову популяцію хромосом, до якої застосовують оператор другого етапу.

На другому етапі здійснюється схрещування. Для цього із пулу родичів $M\left(k\right)$ (рис. 2) випадковим чином з ймовірністю P_c утворюють пари у такий спосіб. Із популяції осіб ви-

падковим чином вибирається пара хромосом. Генерується випадкове число P_z із інтервалу [0; 1] і якщо його значення не більше ніж P_c, то над парою хромосом здійснюється схрещування. У протилежному випадку пара хромосом залишається без зміни. Потім для кожної пари родичів розігрується позиція гена (локус) в хромосомі, яка визначає точку схрещування. Якщо хромосома кожного із родичів включає у себе m генів, то точка схрещування L_c це натуральне число, яке менше m. Тому фіксація точки схрещування зводиться до випадкового вибору цілого числа із інтервалу [1; $L_c - 1$]. Дія оператора схрещування приводить до того, що із пари родичів утворюється нова пара потомків наступним чином: перший потомок у парі, хромосома, якого на позиціях від 1 до L_c складається із ген першого родича, а на позиція від $L_c + 1$ до m із ген другого родича; другий потомок у парі, хромосома, якого на позиціях від 1 до L_c складається із ген другого родича, а на позиція від $L_c + 1$ до m із ген першого родича.

Після виконання оператора схрещування відбувається перехід до К2.

Із залежності, яка визначається зміною рівня води у р. Дністер (рис. 1) був виділений лінійний тренд

$$h(t) = \theta_0 + \theta_1 t, \qquad (23)$$

де θ_0, θ_1 – параметри лінійного тренду.

Коефіцієнти моделі (23) знайдемо, застосувавши метод найменших квадратів, у результаті отримали: θ =304,9214; θ_1=–0,3838.

Із числового ряду $\tilde{H}_t$ виділяємо стаціонарну складову коливного процесу (рис. 3). З використанням розробленого методу у середовищі MatLab написана програма виділення гармонічного тренду з некратними частотами. Було вибрано максимальне число частот $m = 20$; число точок спостережень $N = 184$. Ймовірність схрещування $P_c = 0,9$, а ймовірність мутації склала $P_m = 0,1$. Таким чином, максимальне число коефіцієнтів моделі (2), які визначались, склало $2m + 1 = 41$; із них – 16 нульові. Результат роботи програми відтворює рис. 2, на якому знаком «о» відмічені експериментальні дані, а «+» – результат розрахунку за формулою (2).

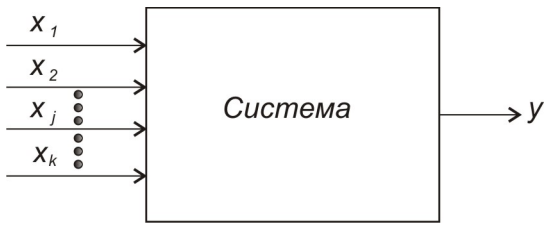

Рисунок 3 – Структурна схема системи «ділянка ріки – спостерігач»

Після виділення із експериментальних даних гармонічного тренду отримали залишок, графік якого зображено на рис. 3. Величину цього залишку визначимо із рівняння (1) за умови, що попередньо визначені лінійний і гармонічні тренди – $H_t = \tilde{H}_t - \left(G(t) + h(t)\right)$. Величина H_t є функцією параметрів, що визначають погодні умови у районі спостережень, тобто

$$H_t = \varphi\left(T_t, f_t, v_t, p_t\right), \qquad (24)$$

де: T_t – середньодобова температура повітря, °*C*;

f_t – кількість опадів, *мм/добу*;

v_t – середньодобова швидкість вітру, *м/с*;

p_t – середньодобовий барометричний тиск, *мм. рт. ст.*

Оскільки рівень води у р. Дністер у значній мірі залежить від кількості опадів, що випали напередодні, тому кінцевий вигляд функціональної залежності (24) був вибраний таким:

$$H_t = \varphi\left(T_t, f_{t-k}, v_t, p_t\right), \qquad (25)$$

де: t – поточний дискретний час

k – зсув у часі.

На основі спостережень за рівнем води у р. Дністер виявлено, що $k = 1,2,3$. Таким чином, функція (24) буде функцією семи змінних

$$H_t = \mu\left(T_t, f_t, f_{t-1}, f_{t-2}, f_{t-3}, v_t, p_t\right). \qquad (26)$$

Будемо розглядати ділянку ріки, за якою ведеться спостереження разом зі спостерігачем як деяку систему, що характеризується сукупністю вхідних величин $\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_k\right)^T$ і вихідною величиною y (рис. 4). У нашому випадку – $x_1 = T_t$, $x_2 = f_t$, $x_3 = f_{t-1}$, $x_4 = f_{t-2}$, $x_5 = f_{t-3}$, $x_6 = v_t$, $x_7 = p_t$, $y = H_t$.

Співвідношення (26) будемо шукати у вигляді полінома

$$y = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \prod_{j=1}^{k} x_j^{s_{ji}}, \qquad (27)$$

де: M – кількість членів полінома;

a_i – коефіцієнти полінома;

s_{ji} – степені аргументів, які повинні задовольняти обмеженню

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ji} \le m.$$

Число членів M полінома (27) визначають за такою формулою [8]:

$$M = \frac{(m+n)!}{m!n!}. \qquad (28)$$

Значення величини $Y_t = H_t$ визначені у дискретні моменти часу $t = \overline{1,N}$. Вхідні величини x_j, $j = \overline{1,k}$, які є аргументами виходу

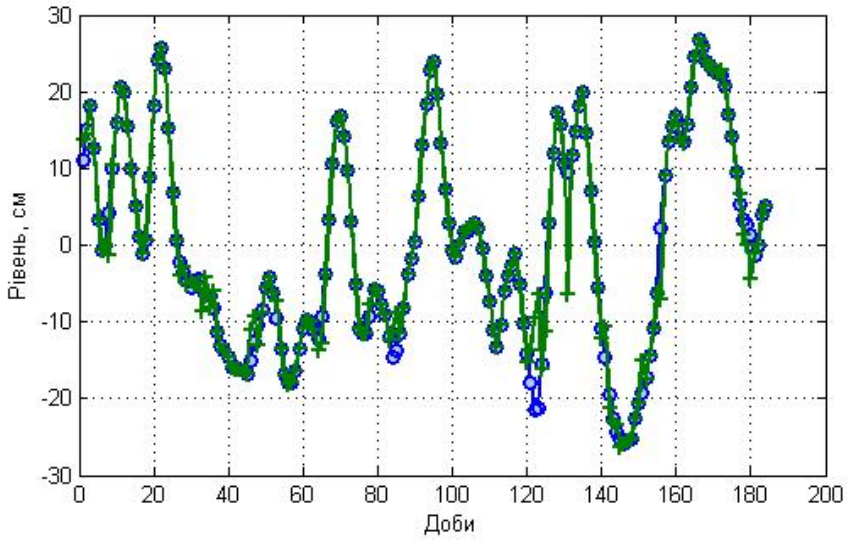

Рисунок 4 – Залежності рівня води від параметрів погодних умов (після вилучення лінійного і гармонічного трендів)

системи y, у кожному спостереженні t приймають певне значення так, що їх сукупність утворює матрицю

$$X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix}.$$

Допустимо, що нам відомі параметри a_i, $i = \overline{1, M-1}$ моделі (27). Тоді за відомими значеннями величин $x_j^{(i)}$ можна обчислити

$$y_t = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(t)} \right)^{s_{ji}}, \; t = \overline{1, N}. \qquad (29)$$

Систему рівнянь (29) зручно подати у матрично-векторній формі

$$\overline{y} = F\overline{a}, \qquad (30)$$

де: $\overline{y} = \left(y_1, y_1, ..., y_N \right)^T$ – обчислене значення виходу моделі (27) у кожній точці спостережень;

F – матриця розміром $N \times M$, елементи якої добутки аргументів при параметрах a_i, тобто

$$F = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(1)} \right)^{s_{j0}} & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(1)} \right)^{s_{j1}} & \dots & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(1)} \right)^{s_{j,M-1}} \\ \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(2)} \right)^{s_{j0}} & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(2)} \right)^{s_{j1}} & \dots & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(2)} \right)^{s_{j,M-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(N)} \right)^{s_{j0}} & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(N)} \right)^{s_{j1}} & \dots & \prod_{j=1}^{k} \left(x_j^{(N)} \right)^{s_{j,M-1}} \end{bmatrix};$$

$\overline{a} = \left(a_0, a_1, ..., a_{M-1} \right)^T$ – вектор параметрів моделі (27).

Знаючи Y_t і y_t, $i = \overline{1, N}$, можна обчислити критерій апроксимації

$$J\left(\overline{a}\right) = \sum_{t=1}^{N} \left(Y_t - y_t \right)^2, \qquad (31)$$

мінімізація якого дає рівняння

$$F^T F\overline{a} = F^T \overline{Y}, \qquad (32)$$

яке називають нормальним рівнянням методу найменших квадратів (МНК).

Безпосередньо із рівняння (32) можна знайти

$$\overline{a} = \left(F^T F \right)^{-1} F^T \overline{Y}. \qquad (33)$$

Використовувати формулу (33) можна лише тоді, коли розмірність вектора параметрів $\overline{a}$ невелика і матриця $F^T F$ є добре обумовленою [9]. Якщо така умова не виконується, то для розв'язку рівняння (32) слід використовувати один із числових методів, наприклад, метод Гауса з вибором головного елементу [4].

У більшості випадків на вихід системи y Y накладається перешкода e, так що спостерігачу доступна тільки величина $Y = y + e$. Якщо допустити, що e адитивна і має нормальний закон розподілу, то оцінки параметрів моделі (29) є незміщеними і ефективними [1].

На практиці, як правило, структура моделі (29) невідома, що приводить до необхідності довільного вибору як числа функцій, так і вигляду самих функцій у моделі (29). Критерій (31), який використовується для визначення параметрів моделі (29) за формулою (33) є внутрішнім критерієм [1] і його використання приводить до помилкового правила: чим складніша модель, тим вона точніша. Тому для вибору структури моделі (29) був запропонований індуктивний метод самоорганізації моделей [1],

ідейну сторону якого визначає теорема Геделя. У відповідності з цією теоремою ніяка система аксіом не може бути логічно замкнутою: завжди можна знайти таку теорему, для доведення якої необхідне зовнішнє доповнення – розширення початкової системи аксіом. Стосовно задачі визначення структури моделі (29) геделівський підхід означає застосування зовнішнього критерію, який дає можливість однозначного вибору єдиної моделі із заданого класу моделей. Критерій називають зовнішнім, якщо його визначення засновано на застосуванні нових даних, які не використовувались при синтезі моделі (29). Це означає, що всі дані, які отримані у результаті експерименту, розбиваються на дві частини N_R і N_Q. Перша із них – навчальна, а друга – перевірна.

У більшості випадків для вибору структури моделі використовують критерії регулярності

$$\Delta^2(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{N_Q}\left(Y_i-y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_Q}Y_i^2} \qquad (34)$$

і мінімуму зміщення

$$\Delta^2(R,Q)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i(R)-y_i(Q)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}Y_i^2}. \qquad (35)$$

Якщо вибраний критерій регулярності (34), то вибирають наступний розподіл даних експерименту [5]: $N_R=0,7N$ і $N_Q=0,3N$, а при виборі критерію (35) – $N_R=0,5N$ і $N_Q=0,5N$.

Як і раніше, для зняття проблеми великої розмірності застосуємо генетичний підхід. Як емпіричну модель будемо розглядати поліном (29) степеня m. Утворимо упорядковану структуру довжиною M, в якій на i-тому місці буде стояти одиниця або нуль в залежності від того чи параметр a_i, $i=\overline{1,M}$ моделі (29) відмінний від нуля, чи нульовий.

Таким чином, задачу синтезу емпіричної моделі сформуємо наступним чином: із початкової популяції хромосом шляхом еволюційного відбору вибрати таку, хромосому, яка забезпечує найкраще значення функції пристосування (мінімальне значення критерію селекції (34) або (35)).

Алгоритм розв'язку поставленої задачі аналогічний раніше розробленому для виділення гармонічного тренду.

На основі розробленого алгоритму була написана програма у середовищі MatLab для побудови математичної моделі залишку, який отримали після вилучення лінійного і гармонічного трендів. Було вибрано $m=4$. З використанням розробленої програми синтезована модель, яка вміщує 173 ненульових і 330-173=157 нульових параметрів a_i, $i=\overline{0,M-1}$ полінома (29). Результати роботи програми відтворює рис. 4, де через «○» позначені експериментальні дані, а через «+» – значення y, які обчислені як вихід синтезованої моделі.

Зауважимо, якщо б модель будували комбінаторним методом, то прийшлось би перебрати 2^M-1 моделей. У відповідності з формулою (28) для $n=7$ і $m=4$ $M=330$. Тоді $2^M-1=2,1873\cdot10^{99}$ варіантів, що практично неможливо реалізувати за допомогою сучасних персональних комп'ютерів.

Адекватність моделі провірялась за допомогою коефіцієнта кореляції K_{Yy} між значеннями Y_i та її виходом $y^{(i)}$. Було отримано: K_{Yy}=0,985, що свідчить про високу степінь кореляції між величинами Y_i і $y^{(i)}$.

На рис. 5 зображено залежність між виходом моделі $y^{(i)}$ і експериментальними значеннями Y_i. Для зручності інтерпретації результатів, величини що нанесені на координатні осі приведені до безрозмірного виду

$$\pi_i=\frac{\Pi_i-\Pi_{min}}{\Pi_{max}-\Pi_{min}},$$

де Π_i – одна із величин Y_i або y_i, а Π_{min}, Π_{max} – їх мінімальні і максимальні значення.

При виконанні умови $y^{(i)}=Y$ на площині $Y\,0\,y^{(i)}$ матимемо пряму лінію, яка засвідчує про повний збіг експериментальних результатів і виходу емпіричної моделі побудованої за такими результатами. Пряма лінія, яка зображена на рис. 6, побудована з використанням МНК-методу і вона вказує на досить мале відхилення експериментальних точок Y від розрахункових значень $y^{(i)}$, що свідчити про адекватність синтезованої емпіричної моделі на засадах генетичних алгоритмів.

На цей же рисунок нанесені довірливі інтервали, які побудовані на основі формули [10]

$$y-t_{1-\alpha/2}s_{\hat{y}}\le\eta<y+t_{1-\alpha/2}s_{\hat{y}},$$

де: $t_{1-\alpha/2}$ – безрозмірна статистика Стьюдента, яка підпорядкована t-розподілу з $N-2$ степенями свободи і для якої рівень значимості $\alpha=0,01$;

$s_y^2=\hat{s}_y^2\left(\frac{1}{N}+\frac{\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}\right)$ – оцінка дисперсії відносно лінії регресії;

$\hat{s}_y^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$.

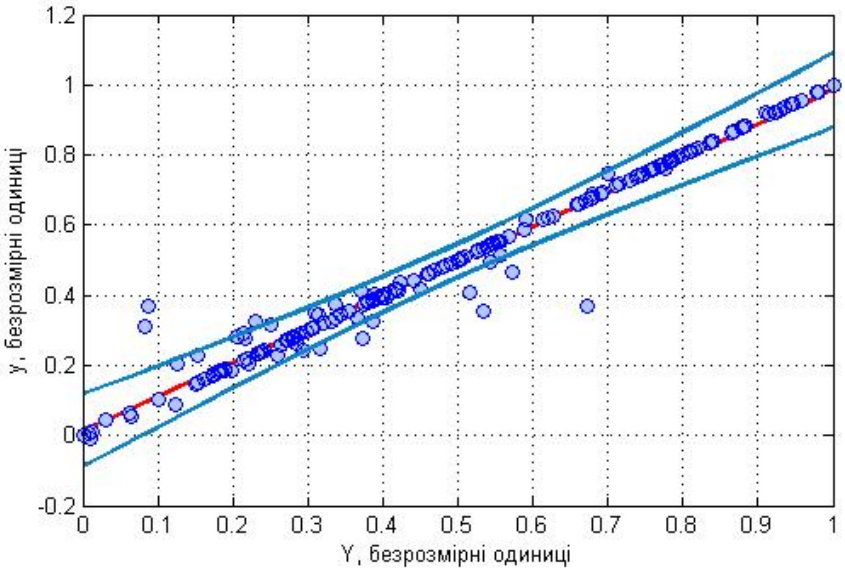

Рисунок 5 – Результати перевірки моделі на адекватність

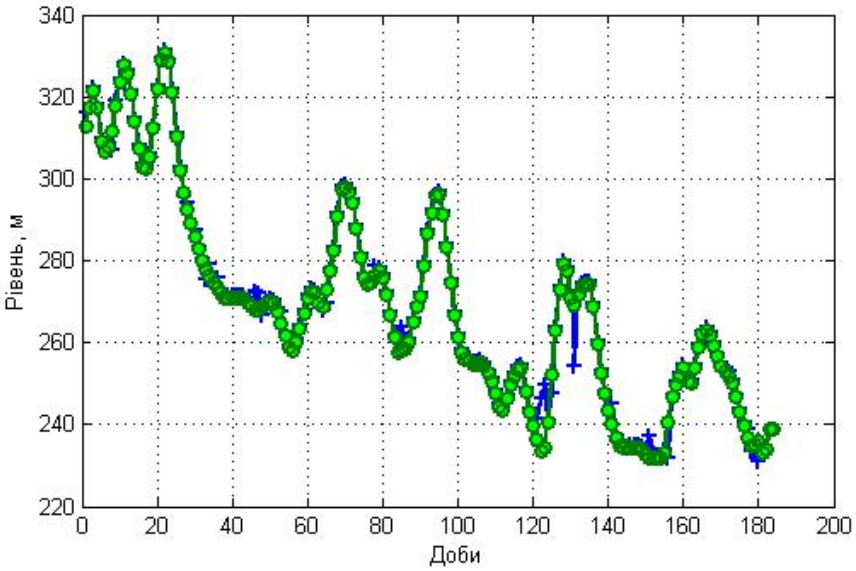

Рисунок 6 – Залежність рівня води у р. Дністер від погодних умов

Як свідчить рис. 6, переважна більшість точок (96,2%) попадають у довірливий інтервал, що з високим ступенем імовірності можна стверджувати про адекватність побудованої математичної моделі. Вихід невеликого числа точок за межі довірливого інтервалу можна пояснити можливими промахами при вимірюваннях рівня, які ведуться візуально, або друкарськими помилками при підготовці звіту і звідки були взяті експериментальні дані.

Знайдені залежності $h(t)$, $G(t)$ і y_t дають можливість знайти

$$\hat{H}_t = G(t) + h(t) + y_t, \qquad (36)$$

де $G(t)$, $h(t)$ і y_t – обчислювались відповідно за формулами (2), (23) і (30).

Таким чином, застосування ідей генетичних алгоритмів до побудови математичної моделі зміни рівня води у р. Дністер дало можливість отримати адекватну модель і значно зменшити об'єм обчислень. Остання обставина відкриває широкі можливості для побудови складних моделей як фізичних явищ, так і технологічних процесів.

Отримана модель зміни рівня води у р. Дністер у залежності від погодних умов може бути використана при прогнозуванні повеней, що як показали події 2008 р. є досить актуальною задачею для Прикарпатського регіону.

Література

1 Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем: монография / А.Г.Ивахненко. – К.: Наукова думка, 1981. – 296 с.

2 Горбійчук М.І. Математичні моделі прогнозування стоку р. Дністер для запобігання техногенних аварій магістральних газопроводів / М.І.Горбійчук, О.В.Пендерецький // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. – 2008. – № 2 (18). – С. 30–33.

3 Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн; пер. с англ. И.Г.Абрамовича, А.М.Березмана, И.А.Вайнштейна и др. под ред. И.Г.Абрамовича. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

4 Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М.Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

5 Ивахненко А.Г. Справочник по типовым программам моделирования. / А.Г.Ивахненко, Ю.В.Коппа, В.С.Степашко и др.; под ред. А.Г.Ивахненко – К.: Техніка, 1980. – 180 с.

6 Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский; пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М.: Горячая линия-Телеком, 2004. – 452 с

7 Ивахненко А.Г. Помехоустойчивость моделирования: монография / А.Г.Ивахненко, В.С.Степашко. – К/: Наук. думка, 1985. – 216 с.

8 Горбійчук М.І. Індуктивний метод побудови математичних моделей газоперекачувальних агрегатів природного газу / М.І.Горбійчук, М.І.Когутяк, Я.І.Заячук // Нафтова і газова промисловість. – 2008. – № 5. – С. 32–35.

9 Ермаков С.М. Математическая теория оптимального эксперимента: учеб. пособие / С.М.Ермаков, А.А.Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

10 Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. / Д. Химмельблау; пер. с англ. В. Д. Скаржинского. – М.: Мир, 1973. – 957 с.

Стаття поступила в редакційну колегію 30.01.10
Рекомендована до друку професором ***І. С. Кісілем***